Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di
Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

a.a. 2008/2009

Le correzioni apportate il 16 febbraio 2010 sono indicate da uno sfondo giallo .

3 Forma Canonica di Jordan – Applicazioni

In questa Sezione, per ogni k intero positivo e $\lambda \in \mathbb{C}$, indicheremo con $N \in \mathbb{C}^{k \times k}$ la matrice tale che $J_k(\lambda) = \lambda I + N$, ovvero:

$$k = 1: \; N = 0 \quad , \quad k = 2: \; N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad k = 3: \; N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots$$

`Problema 1`

Siano

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) \quad , \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

due elementi di $C^{4\times 4}$ (si osservi che $b_j \in \mathbb{C}^4$ e $c_j \in \mathbb{C}^{1\times 4}$). Verificare che

$$BN = (0, b_1, b_2, b_3) \quad , \quad NC = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

`Problema 2`

Sia $N \in \mathbb{C}^{5\times 5}$. Determinare N^2, N^3, N^4 ed N^5.

In generale, per $N \in \mathbb{C}^{k\times k}$ si ha $N^j \neq 0$ per $j < k$ e $N^k = 0$.

`Problema 3`

Sia λ un numero complesso non nullo.

(1) Posto $J_2(\lambda) = \lambda I + N$, determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tali che

$$\alpha I + \beta N = (J_2(\lambda))^{-1}$$

ovvero tali che $(\lambda I + N)(\alpha I + \beta N) = I$.

(2) Posto $J_3(\lambda) = \lambda I + N$, determinare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tali che

$$\alpha I + \beta N + \gamma N^2 = (J_3(\lambda))^{-1}$$

In generale (ricordando che $N^0 = I$) si ha

$$(J_n(\lambda))^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{N^j}{\lambda^{j+1}}$$

4 Decomposizione ai valori singolari

In questa Sezione, i valori singolari di una matrice in $\mathbb{C}^{n\times k}$ si indicano con $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, $p = \min\{n, k\}$.

`Problema 1`

Per ciascuna delle seguenti matrici determinare una decomposizione ai valori singolari. Nella soluzione si riportano solo i valori singolari: per le matrici U e V che completano la decomposizione, si raccomanda di *verificare la risposta*!

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = 0$]

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 2\sqrt{2}, \sigma_2 = 1$]

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0$]

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0$]

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$]

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = 0$]

(g) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2$]

`Problema 2`

Sia

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V = (v_1, v_2)$$

una decoposizione ai valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{4\times 2}$.

(a) Indicare $\mathrm{rk}(A)$, una base ortonormale di $\ker A^{\mathsf{H}}$ ed una di $\mathrm{im}\, A$.

(b) Determinare $||A||_2$.

(c) Determinare $A(v_1 + 4v_2)$.

(d) Determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione $Ax = u_1 + u_2$.

(e) Indicare una decomposizione ai valori singolari di A^{H}.

`Problema 3`

Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

(a) Se i valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sono $\sigma_1 = 17, \sigma_2 = 2$ e $\sigma_3 = \frac{1}{2}$, allora A è invertibile.

(b) Una matrice e la sua pseudoinversa hanno lo stesso rango.

(c) Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\det A = -2i$, allora tutti i valori singolari di A sono positivi.

(d) Se tutti i valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sono positivi, allora $\det A \in \mathbb{R}$.

(e) Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana. Se σ è valore singolare di A, allora σ è autovalore di A.

`Problema 4`

Sia A la matrice del punto (d) del Problema 1. Posto

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad f = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare A^+.

(b) Determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

(c) Determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione $Ax = f$.

`Problema 5`

Siano $T = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ortogonale, $W = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ ortogonale

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e $M = TSW^{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}^{3\times 4}$.

(a) Spiegare perché T, S, W *non è* una decomposizione ai valori singolari di M.

(b) Determinare matrici di permutazione $P_1 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ e $P_2 \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tali che

$$\text{per ogni } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^3 \text{ si ha } (c_1, c_2, c_3)P_1 = (c_3, c_2, c_1)$$

e

$$\text{per ogni } c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C}^4 \text{ si ha } (c_1, c_2, c_3, c_4)P_2 = (c_3, c_2, c_1, c_4)$$

(c) Verificare (utilizzando la definizione) che

$$U = TP_1 \quad , \quad \Sigma = P_1^{\mathsf{T}}\, S\, P_2 \quad , \quad V = WP_2$$

è una decomposizione ai valori singolari di M.

`Problema 6`

Determinare una decomposizione ai valori singolari e la pseudoinversa delle matrici

$$M = \begin{bmatrix} -2 & \\ & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$R = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{C}^{1\times 4}$$

`Problema 7`

Siano

$$A = (1, 1, 1, 2) \quad , \quad b = 2$$

Determinare la pseudoinversa di A e la soluzione dell'equazione $Ax = b$ di norma minima.

`Problema 8`

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare la pseudoinversa di A e la soluzione dell'equazione $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.