Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di
Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

a.a. 2008/2009

5 Forme Quadratiche

`Problema 1`

Classificare ciascuna delle seguenti matrici simmetriche, indicarne l'inerzia ed una matrice che realizza la congruenza. Nella soluzione si riportano solo l'inerzia e la classificazione della matrice: per la matrice che realizza la congruenza, si raccomanda di *verificare la risposta*!

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: inerzia di $A = (0, 1, 1)$, semidefinita positiva.]

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: inerzia di $A = (1, 1, 1)$, indefinita.]

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: inerzia di $A = (1, 0, 2)$, indefinita.]

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: inerzia di $A = (1, 1, 1)$, indefinita.]

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: inerzia di $A = (0, 2, 1)$, semidefinita positiva.]

(f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: inerzia di $A = (1, 0, 2)$, indefinita.]

Problema 2

Determinare la forma quadratica $F(x)$ associata alla matrice A definita nel Problema 1, parte (d), ed indicare $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tali che: $F(a) > 0$, $F(b) < 0$, $c \neq 0$ e $F(c) = 0$.

Problema 3

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simmetriche. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia *vero* o *falso*:

(a) Se A è simile a B, allora A e B hanno la stessa inerzia.

(b) Se A è congruente a B, allora A e B sono simili.

(c) Se A è congruente a B, allora A e B hanno lo stesso determinante.

(d) Se A è congruente a B, allora $\det A = 0$ se e solo se $\det B = 0$.

Problema 4

Siano $A = \mathrm{diag}(4, -9, 1, -1)$ e $B = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$.

(a) Determinare $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ *di permutazione* tale che $PAP^{\mathsf{T}} = \mathrm{diag}(4, 1, -9, -1)$

(b) Determinare $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ *diagonale* invertibile tale che $SBS^{\mathsf{T}} = \mathrm{diag}(4, 1, -9, -1)$

(c) Dimostrare che A e B sono congruenti.

6 Simulazioni di prova scritta.

In questa Sezione sono presentate tre “simulazioni” di prova scritta, ciascuna costituita da quattro esercizi.

`Problema A.1`
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare la forma canonica di Jordan di A.

(b) Indicare una matrice C che realizza la similitudine.

(c) Indicare una decomposizione canonica di $\mathbb{C}^4$ in sottospazi invarianti di A.

[Soluzione: (a) $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(0), J_3(1))$; (c) $\mathbb{C}^4 = \ker A \oplus \ker(A-I)^3$]

`Problema A.2`
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

(a) Determinare una decomposizione ai valori singolari di A.

(b) Determinare la matrice pseudoinversa di A.

[Soluzione: (a) Valori singolari: $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$; (b) $A^+ = A$]

`Problema A.3`
Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la norma indotta dal prodotto scalare canonico, e siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare l'insieme $\mathscr{S}$ delle soluzioni del sistema $Ax = b$.

(b) Determinare la matrice pseudoinversa di A.

(c) Deteminare l'elemento di $\mathscr{S}$ di norma minima.

[Soluzione: (a) $\mathscr{S}$ ha infiniti elementi...; (b) $A^+ = A^\mathsf{T}(AA^\mathsf{T})^{-1} = \ldots$; (c) $A^+b = \ldots$]

`Problema A.4`
Siano $U = (u_1, \ldots, u_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ortogonale, e

$$A = U\,\mathrm{diag}(2, 4, 1, 0)\,U^\mathsf{T}$$

(a) Determinare l'inerzia di A.

(b) Classificare la forma quadratica associata ad A.

(c) Indicare un elemento non nullo di $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $Av \bullet v = 0$.

[Soluzione: (a) Inerzia di $A = (0, 1, 3)$; (b) Semidefinita positiva; (c) $v = u_4$]

Problema B.1

Sia $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ una matrice di autovalori 0, di molteplicità algebrica 1 e geometrica 1, e i, di molteplicità algebrica 3 e geometrica 2.

Determinare la forma canonica di Jordan di A ed indicare una decomposizione canonica di $\mathbb{C}^4$ in sottospazi invarianti di A.

[Soluzione: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(0), J_1(i), J_2(i))$; $\mathbb{C}^4 = \ker A \oplus \ker(A - iI)^2$]

Problema B.2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare una decomposizione ai valori singolari di A.

(b) Determinare la matrice pseudoinversa di A.

[Soluzione: (a) Valori singolari: $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$; (b) $A^+ = \frac{1}{4}A$]

Problema B.3

Siano $A = (1, 1)$ e $b = 1$.

(a) Determinare la matrice pseudoinversa di A.

(b) Determinare l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni del sistema $Ax = b$.

(c) Disegnare su un piano cartesiano l'insieme $\mathscr{S}$.

[Soluzione: (a) $A^+ = A^\mathsf{T}(AA^\mathsf{T})^{-1} = \ldots$; (b) $\mathscr{S}$ ha infiniti elementi ...]

Problema B.4

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare l'inerzia di A.

(b) Classificare A.

[Soluzione: (a) Inerzia di $A = (1, 0, 2)$; (b) Indefinita]

`Problema C.1`

Siano

$$M = \mathrm{diag}(J_1(0), J_1(i), J_2(i)) \quad \text{e} \quad W = \mathrm{diag}(J_2(i), J_1(0), J_1(i))$$

Decidere se M e W siano simili e, in caso affermativo, indicare una matrice che realizza la similitudine.

[Soluzione: le matrici sono simili, ed una matrice che realizza la similitudine è quella che realizza la permutazione $1234 \to 3412$]

`Problema C.2`

Sia

$$A = (u_1, u_2) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (v_1, v_2, v_3)^{\mathsf{T}}$$

(a) Determinare il rango di A e basi ortonormali di $\operatorname{im} A$ e $\ker A$.

(b) Determinare $A(3v_1 + 4v_3)$.

(c) Posto $b = u_1$, determinare l'insieme $\mathscr{S}$ delle soluzioni del sistema $Ax = b$.

[Soluzione: (a) $\operatorname{rk} A = 1, \operatorname{im} A = \langle u_1 \rangle, \ker A = \langle v_2, v_3 \rangle$; (b) $9u_1$; (c) $\mathscr{S} = \frac{1}{3}\, v_1 + \ker A$]

`Problema C.3`

Sia

$$A = (u_1, u_2) \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare la matrice pseudoinversa di A.

(b) Posto $b = u_1 + u_2$, determinare l'insieme $\mathscr{S}_{MQ}$ delle soluzioni del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

[Soluzione: (a) Utilizzando la definizione; (b) $\mathscr{S}_{MQ}$ ha infiniti elementi ...]

`Problema C.4`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare l'inerzia di A.

(b) Classificare A.

[Soluzione: (a) Inerzia di $A = (3, 0, 0)$; (b) Definita negativa]