Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Capitolo 3

Forma canonica di Jordan

M. Ciampa

Ingegneria Elettrica, a.a. 2009/2010

Capitolo 3

Forma canonica di Jordan

Nel Capitolo 1 si è discusso il problema della diagonalizzazione di matrici di $\mathbb{K}^{n\times n}$ e si è descritta una procedura che, per ciascuna matrice, *decide* se sia diagonalizzabile ed eventualmente *determina* la forma diagonale ed una matrice che realizza la similitudine.

Ricordiamo che il problema della diagonalizzazione è stato originato dalla necessità di risolvere un sistema di equazioni differenziali: se la matrice del sistema è diagonalizzabile, risulta semplice determinare le soluzioni del sistema. Resta il problema di cosa fare se la matrice *non* è diagonalizzabile.

In questo capitolo si studia il problema della *riduzione a forma di Jordan* di matrici di $\mathbb{C}^{n\times n}$. Per prima cosa si introduce la nozione di *matrice in forma di Jordan* e la si utilizza per formulare il problema. Poi si descrive una procedura che consente, per ciascuna matrice di $\mathbb{C}^{n\times n}$, di risolvere il problema posto. Infine, si utilizzano i risultati ottenuti per mostrare la diagonalizzabilità di una particolare classe di matrici di $\mathbb{C}^{n\times n}$ (le *matrici hermitiane*) e della corrispondente classe di matrici di $\mathbb{R}^{n\times n}$ (le *matrici simmetriche*). Il capitolo termina con un esempio che illustra come utilizzare la riduzione a forma canonica di Jordan per risolvere un sistema di equazioni differenziali.

In questo capitolo, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ utilizzeremo le abbreviazioni seguenti:

$$J_1(\lambda) = \lambda \in \mathbb{C}^{1\times 1}\ ,\ J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}\ ,\ J_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}\ ,\ \dots$$

3.1 Definizione (matrice diagonale a blocchi)

Siano $n_1, \dots, n_k$ numeri interi positivi con $n_1 + \cdots + n_k = n$, e per $j = 1, \dots, k$ sia A_j una matrice di dimensione $n_j \times n_j$ ad elementi in $\mathbb{C}$. Il simbolo

$$\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$$

indica la matrice di ordine $k \times k$ con elemento di posto i, j uguale a A_i se $i = j$, uguale a $0 \in \mathbb{C}^{n_i \times n_j}$ se $i \neq j$, ovvero la matrice (gli elementi non esplicitamente indicati sono nulli):

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

La matrice $\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$ si chiama *matrice diagonale a blocchi di blocchi sulla diagonale* $A_1, \dots,\ A_k$.

3.2 Esempio

Siano $n_1 = 1, n_2 = 2$, e quindi $n = 3$, e

$$A_1 = 1 \in \mathbb{C}^{1\times 1} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Allora:

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -i \\ 0 & 6 & 9 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad , \quad \operatorname{diag}(A_2, A_1) = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -i & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

La matrice diagonale a blocchi di blocchi sulla diagonale $J_2(3), J_1(-1)$ è:

$$\operatorname{diag}(J_2(3), J_1(-1)) = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

3.3 Definizione (matrice in forma di Jordan)

Una matrice $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice *in forma di Jordan* se esistono $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{C}$ e $\delta_1, \dots,$ δ_k numeri interi positivi tali che:

$$\delta_1 + \cdots + \delta_k = n \quad \text{e} \quad M = \operatorname{diag}(J_{\delta_1}(\lambda_1), \dots, J_{\delta_k}(\lambda_k))$$

La matrice $J_{\delta_j}(\lambda_j) \in \mathbb{C}^{\delta_j\times\delta_j}$ si chiama *blocco di Jordan associato a λ_j di dimensione δ_j.*

3.4 Esempio

Le matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 1 \\ 0 & 0 & 3i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

sono in forma di Jordan, le matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

sono diagonali a blocchi (scegliendo opportunamente n_1 ed n_2) ma non in forma di Jordan.

Si osservi che *una matrice diagonale è in forma di Jordan.*

3.5 Definizione (forma canonica di Jordan)

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se esiste una matrice in forma di Jordan *simile* ad A, la matrice A si dice *riducibile (per similitudine) a forma di Jordan*, e la matrice in forma di Jordan simile ad A si chiama *forma canonica di Jordan di A* e si indica con la sigla FCJ(A).

Nel seguito di questo capitolo si affronta il *problema della riduzione a forma di Jordan: decidere se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sia riducibile a forma di Jordan e, eventualmente, determinare la forma canonica di Jordan di A ed una matrice che realizza la similitudine.*

3.6 Teorema (riducibilità a forma di Jordan)

Ogni matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è riducibile a forma di Jordan. Tutte le matrici in forma di Jordan simili ad A hanno sulla diagonale gli stessi blocchi, ovvero due matrici in forma di Jordan simili ad A differiscono solo per l'ordine dei blocchi sulla diagonale. Quest'ultima proprietà si esprime dicendo che: *La forma canonica di Jordan di A è unica a meno di permutazione dei blocchi sulla diagonale.*

Dimostrazione: No. Con le considerazioni che seguono, senza preoccuparci di dare una dimostrazione del teorema, *mostreremo come si possa determinare una matrice in forma di Jordan simile ad A ed una matrice che realizza la similitudine.*

Matrici in forma di Jordan: proprietà

Una matrice in forma di Jordan è determinata dall'elenco dei blocchi sulla diagonale. In questa sezione si mostra come tale elenco, a meno dell'ordine, sia rilevabile da proprietà della matrice *invarianti per similitudine.*

3.7 Esempio

Sia

$$M = \mathrm{diag}(J_3(2), J_2(2), J_1(1)) = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{6\times 6}$$

una matrice in forma di Jordan. Si ha:

- Il polinomio caratteristico di M è $p(x) = (2-x)^5(1-x)$: *ciascun blocco sulla diagonale è associato ad un autovalore e la molteplicità algebrica di ciascun autovalore è pari alla somma delle dimensioni dei blocchi ad esso associati*;

- Poiché:

$$M - 2I = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

  e:

$$M - I = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  risulta: $\dim \mathrm{Ker}\,(M-2I) = 2$, e $\dim \mathrm{Ker}\,(M-I) = 1$: *per ogni λ autovalore di M, la dimensione di* $\mathrm{Ker}\,(M-\lambda I)$ *— che coincide con il numero di colonne nulle di $(M-\lambda I)$ — è pari al numero di blocchi associati a λ.* Infatti ciascun blocco associato all'autovalore λ genera una colonna nulla in $M - \lambda I$, e le colonne non nulle sono indipendenti.

- Poiché:

$$(M - 2I)^2 = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

risulta $\dim \operatorname{Ker}(M-2I)^2 = 4$: *la dimensione del nucleo di* $(M-\lambda I)^2$ — che coincide con il numero di colonne nulle di $(M-\lambda I)^2$ — *è pari alla somma del numero di blocchi associati a* λ *di dimensione almeno uno e del numero di blocchi associati a* λ *di dimensione almeno due.* Infatti ciascun blocco di dimensione uno associato all'autovalore λ genera una colonna nulla in $(M-\lambda I)^2$, ciascun blocco di dimensione almeno due associato all'autovalore λ genera due colonne nulle in $(M-\lambda I)^2$, e le colonne non nulle sono indipendenti.

3.8 Osservazione

Sia $M = \operatorname{diag}(J_{\delta_1}(\lambda_1), \dots, J_{\delta_k}(\lambda_k)) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice in forma di Jordan. Per ogni λ autovalore di M e j intero positivo si indica con $N_j(\lambda)$ il numero di blocchi associati a λ di dimensione $\geqslant j$.

Ad esempio: $M = \operatorname{diag}(J_2(2), J_2(2), J_1(2), J_3(-1), J_2(-1)) \in \mathbb{C}^{10\times 10}$ ha autovalori 2 e -1 e:

$$N_1(2) = 3, N_2(2) = 2, N_3(2) = 0 \quad \text{e} \quad N_1(-1) = 2, N_2(-1) = 2, N_3(-1) = 1$$

Allora:

- *la molteplicità algebrica di ciascun autovalore di* M *è pari alla somma delle dimensioni dei blocchi ad esso associati*;
- Per ciascun λ autovalore di M e j intero positivo si ha: *la dimensione del nucleo di* $(M-\lambda I)^j$ — che coincide con il numero di colonne nulle di $(M-\lambda I)^j$ — *è pari a* $N_1(\lambda) + \cdots + N_j(\lambda)$.

3.9 Esempio

Sia $M \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ una matrice in forma di Jordan tale che:

(1) il polinomio caratteristico di M è $p(x) = (2-x)^3(i-x)^4$;

(2) $\dim \operatorname{Ker}(M-2I) = 1$ e $\dim \operatorname{Ker}(M-iI) = 2$;

(3) $\dim \operatorname{Ker}(M-2I)^2 = 2$, $\dim \operatorname{Ker}(M-2I)^3 = 3$;

(4) $\dim \operatorname{Ker}(M-iI)^2 = 4$

Ci si chiede se sia possibile determinare M.

Dalla prima informazione si deduce che:

- i blocchi possono essere associati solo a 2 o a i;
- la somma delle dimensioni dei blocchi associati a 2 è 3, quella dei blocchi associati a i è 4.

Dalla seconda informazione si deduce che vi sono in totale *tre* blocchi: *uno* associato a 2 e *due* associati a i, e quindi:

- il blocco associato a 2 ha dimensione 3;
- i blocchi associati a i possono avere entrambi dimensione 2 oppure uno dimensione 1 e l'altro 3.

La terza informazione conferma quanto già dedotto riguardo all'autovalore 2.

Dall'ultima informazione si deduce: $N_1(i) + N_2(i) = 4$ e quindi, essendo $N_1(i) = 2$ si ricava $N_2(i) = 2$: entrambi i blocchi associati a i hanno dimensione due.

Quanto ricavato consente di dire che i tre blocchi sulla diagonale di M sono: $J_3(2), J_2(i)$ e $J_2(i)$, ma *non* consente di stabilire *in che ordine* essi si presentino lungo la diagonale: le informazioni assegnate sono *indipendenti* dall'ordine dei blocchi sulla diagonale.

3.10 Osservazione

L'esempio precedente mostra che *informazioni sufficienti per determinare univocamente i blocchi sulla diagonale di una matrice M in forma di Jordan* sono:

- Il polinomio caratteristico di M;
- Per ogni autovalore λ di M e ogni intero positivo j non superiore alla molteplicità algebrica di λ, le quantità $\dim \operatorname{Ker} (M - \lambda I)^j$.

Tali informazioni, inoltre, sono *indipendenti* dall'ordine dei blocchi sulla diagonale.

Queste informazioni sono *invarianti per similitudine*, ovvero: Se $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sono matrici simili si ha:

(1) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(2) Per ogni elemento λ dello spettro e ogni intero positivo j si ha:

$$\dim \operatorname{Ker} (A - \lambda I)^j = \dim \operatorname{Ker} (B - \lambda I)^j$$

(Quest'ultima uguaglianza si deduce osservando che le matrici $(A - \lambda I)^j$ e $(B - \lambda I)^j$ risultano simili.)

Determinazione della forma canonica di Jordan

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. In questa sezione si mostra come determinare, da A, la sua forma canonica di Jordan.

3.11 Esempio

Sia $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tale che:

(1) il polinomio caratteristico di A è: $p(x) = (1 - x)^3(i - x)^2$

(2) $\dim \operatorname{Ker} (A - I) = 2$, $\dim \operatorname{Ker} (A - iI) = 2$

Si vuole determinare, se possibile, la forma canonica di Jordan di A.

Per l'Osservazione 3.10, le informazioni date su A possono essere lette inalterate come informazioni su FCJ(A) che, si ricordi, è una matrice in forma di Jordan simile ad A.

Dalla prima informazione si deduce che:

- i blocchi sulla diagonale di FCJ(A) possono essere associati solo a 1 oppure a i;
- la somma delle dimensioni dei blocchi associati a 1 è 3, quella dei blocchi associati a i è 2.

Dalla seconda informazione si deduce che sulla diagonale di FCJ(A) vi sono in totale *quattro* blocchi: *due* associati a 1 e *due* associati a i, e quindi:

- i blocchi associati a 1 hanno dimensione 1 e 2;

- i blocchi associati a i hanno entrambi dimensione 1.

Dunque i blocchi sulla diagonale di $\mathrm{FCJ}(A)$ sono: $J_1(1), J_2(1), J_1(i)$ e $J_1(i)$ e quindi la forma canonica di Jordan di A è $\mathrm{diag}(J_1(1), J_2(1), J_1(i), J_1(i))$.

3.12 Problema

Sia $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tale che:

(1) il polinomio caratteristico di A è: $p(x) = (1-x)^3(i-x)^2$

(2) $\dim \mathrm{Ker}\,(A - I) = 3$, $\dim \mathrm{Ker}\,(A - iI) = 2$

Determinare, se possibile, la forma canonica di Jordan di A.

3.13 Esempio

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

Si vuole determinare la forma canonica di Jordan di A.

Si ricordi ancora che $\mathrm{FCJ}(A)$ è *una matrice in forma di Jordan simile ad A*. Informazioni sufficienti per determinare i blocchi sulla diagonale di $\mathrm{FCJ}(A)$ sono quelle elencate nell'Osservazione 3.10. La stessa osservazione asserisce che le informazioni si possono ottenere direttamente da A.

Il polinomio caratteristico di A è: $p(x) = (1-x)^3(-x)$ dunque gli autovalori sono 0 e 1 e la molteplicità algebrica di 0 è uno, quella di 1 è tre. Inoltre: $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$ e $\dim \mathrm{Ker}\,(A - I) = 2$ quindi la forma canonica di Jordan contiene *un* blocco associato all'autovalore 0 – di dimensione necessariamente uno – e *due* blocchi associati all'autovalore 1 – di dimensione necessariamente uno e due, rispettivamente.

La forma canonica di Jordan di A è dunque: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(0), J_1(1), J_2(1))$.

3.14 Problema

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A.
(Soluzione: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(1), J_2(2))$.)

3.15 Esempio

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A.

Il polinomio caratteristico di A è: $p(x) = (2-x)^4$ dunque vi è un solo autovalore: 2, di molteplicità algebrica quattro. Inoltre: $\dim \mathrm{Ker}\,(A - 2I) = 2$, quindi la forma canonica di Jordan contiene *due* blocchi associati all'autovalore 2. Infine $\dim \mathrm{Ker}\,(A - 2I)^2 = 3$, quindi un solo blocco ha dimensione maggiore di uno. Perciò, le dimensioni dei blocchi sono, rispettivamente, uno e tre.

La forma canonica di Jordan di A è dunque: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(2), J_3(2))$.

3.16 Osservazione

Gli esempi precedenti mostrano che, per ogni $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *proprietà di A invarianti per similitudine determinano univocamente i blocchi sulla diagonale di una matrice in forma di Jordan simile ad A*, ma non è chiaro se vi siano proprietà di A, invariani per similitudine, che consentano di decidere l'*ordine* dei blocchi sulla diagonale.

Siano $M = \operatorname{diag}(J_1(1), J_3(2))$ e $N = \operatorname{diag}(J_3(2), J_1(1))$ due elementi di $\mathbb{C}^{4\times 4}$ in forma di Jordan ottenuti uno dall'altro *permutando i blocchi sulla diagonale* e sia P la matrice di permutazione definita da $P = (e_2, e_3, e_4, e_1)$. Allora: $M = PNP^{-1}$, ovvero M ed N sono simili.

Se ne deduce che: *Due elementi di $\mathbb{C}^{n\times n}$ in forma di Jordan ottenuti uno dall'altro permutando i blocchi sulla diagonale sono simili.* Dunque *è impossibile distinguere i due elementi considerando solo informazioni invarianti per similitudine.*

La situazione è dunque la seguente: data $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tutte* le matrici in forma di Jordan simili ad A hanno sulla diagonale *gli stessi blocchi ma in ordine diverso*, e quindi sono *tutte simili.* Questo giustifica l'uso fatto del termine *forma canonica di Jordan di A* e della sigla $\mathrm{FCJ}(A)$.

3.17 Problema

(1) Decidere quali delle seguenti matrici è in forma di Jordan (è sottinteso che gli elementi non specificati sono nulli):

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 3 & 2 \\ & 1 & 0 \end{array}\right] \quad , \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ & 6 & \\ \hline & & 2 \end{array}\right] \quad , \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right]$$

(2) Siano $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tali che:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \operatorname{diag}(J_1(2), J_3(i)) \quad , \quad \mathrm{FCJ}(B) = \operatorname{diag}(J_3(i), J_1(2))$$

Decidere se A e B sono simili.

(Suggerimento: determinare una matrice di permutazione che realizza la similitudine tra $\mathrm{FCJ}(A)$ e $\mathrm{FCJ}(B)$.)

(3) Per ciascuno degli esempi precedenti, determinare *tutte* le matrici in forma di Jordan simili ad A.

Deteminazione di una matrice che realizza la similitudine

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. In questa sezione si mostra come determinare, una volta che sia nota la forma canonica di Jordan di A, una matrice C che realizza la similitudine, ovvero tale che $A = C\,\mathrm{FCJ}(A)\,C^{-1}$.

3.18 Esempio

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

e

$$\mathrm{FCJ}(A) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

la forma canonica di Jordan di A (calcolata in un esempio precedente).

Cerchiamo $c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C}^4$ *linearmente indipendenti* tali che, posto:

$$C = (c_1, \dots, c_4) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

si abbia:

$$AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$$

Leggendo quest'ultima uguaglianza per colonne si ottiene:

(1) $Ac_1 = 0$;

(2) $Ac_2 = c_2$;

(3) $Ac_3 = c_3$;

(4) $Ac_4 = c_3 + c_4$, ovvero: $(A - I)c_4 = c_3$.

Dalle uguaglianze si deduce che:

(1) c_1 deve essere un elemento non nullo di $\mathrm{Ker}\, A$;

(2) c_2 deve essere un elemento non nullo di $\mathrm{Ker}\,(A - I)$;

(3) anche c_3 deve essere un elemento non nullo di $\mathrm{Ker}\,(A - I)$;

(4) poiché $(A-I)c_4 = c_3$ e $c_3 \neq 0$, $c_4 \notin \mathrm{Ker}\,(A-I)$ ma, essendo $(A-I)^2 c_4 = (A-I)c_3 = 0$, deve essere $c_4 \in \mathrm{Ker}\,(A - I)^2$.

Tenuto conto che:

- $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$
- $\dim \mathrm{Ker}\,(A - I) = 2$
- $\dim \mathrm{Ker}\,(A - I)^2 = 3$ e $\mathrm{Ker}\,(A - I) \subset \mathrm{Ker}\,(A - I)^2$

si deduce la seguente procedura per determinare $c_1, \dots, c_4$:

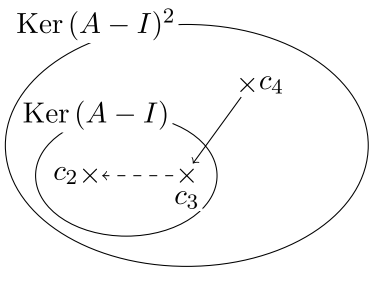
(1) $c_1 =$ un qualsiasi elemento non nullo di $\mathrm{Ker}\, A$;

(2) $c_4 =$ un qualsiasi elemento di $\mathrm{Ker}\,(A - I)^2$ *non appartenente* a $\mathrm{Ker}\,(A - I)$;

(3) $c_3 = (A - I)c_4$ (e quindi $c_3 \in \mathrm{Ker}\,(A - I)$);

(4) $c_2 =$ un qualsiasi elemento di $\mathrm{Ker}\,(A - I)$ *linearmente indipendente da* c_3 (certamente esistente perché $\dim \mathrm{Ker}\,(A - I) = 2$).

Il grafico seguente schematizza il procedimento per determinare c_2, c_3 e c_4:



L'uso delle frecce ricorda l'*ordine* nel quale gli elementi sono determinati. L'uso della freccia continua da c_4 a c_3 e della freccia a tratteggio da c_3 a c_2 allude al fatto che, mentre c_3 è determinato *univocamente* da c_4, c_3 determina c_2 solo nel senso che c_2 e c_3 devono essere elementi linearmente indipendenti di $\mathrm{Ker}\,(A-I)$.

Nel caso in esame si ha:

$$\mathrm{Ker}\,A = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

e

$$\mathrm{Ker}\,(A-I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad \mathrm{Ker}\,(A-I)^2 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

Si osservi che si è scelto di ottenere una base di $\mathrm{Ker}\,(A-I)^2$ *aggiungendo* un elemento a quella di $\mathrm{Ker}\,(A-I)$.

Allora possiamo scegliere:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si osservi che si è scelto come vettore c_4 l'elemento della base di $\mathrm{Ker}\,(A-I)^2$ non appartenente alla base di $\mathrm{Ker}\,(A-I)$. Di conseguenza:

$$c_3 = (A-I)c_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si osservi che, come deve, l'elemento ottenuto è in $\mathrm{Ker}\,(A-I)$.

Infine, possiamo scegliere:

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una matrice che realizza la similitudine è quindi:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(<u>Esercizio</u>: verificare che C è invertibile e che $AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$.)

3.19 Esempio

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

Si vuole determinare la forma canonica di Jordan di A ed una matrice che realizza la similitudine.

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p(x) = (-x)(1-x)^3$$

e gli autovalori sono: 0, di molteplicità algebrica uno, e 1 di molteplicità algebrica tre. Inoltre: $\dim \operatorname{Ker}(A-I) = 1$, quindi: la forma canonica di Jordan contiene *un* blocco associato all'autovalore 0 – di dimensione necessariamente uno – e *un* blocco associato all'autovalore 1 – di dimensione necessariamente tre.

La forma canonica di A è perciò:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \operatorname{diag}(J_1(0), J_3(1))$$

Cerchiamo adesso $c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{C}^4$ *linearmente indipendenti* tali che, posto:

$$C = (c_1, \ldots, c_4) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

si abbia:

$$AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$$

Leggendo quest'ultima uguaglianza per colonne si ottiene:

(1) $Ac_1 = 0$;

(2) $Ac_2 = c_2$;

(3) $Ac_3 = c_2 + c_3$, ovvero: $(A-I)c_3 = c_2$;

(4) $Ac_4 = c_3 + c_4$, ovvero: $(A-I)c_4 = c_3$.

Dalle uguaglianze si deduce che:

(1) c_1 deve essere un elemento non nullo di $\operatorname{Ker} A$;

(2) c_2 deve essere un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A-I)$;

(3) poiché $(A-I)c_2 = 0$, c_3 deve essere un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A-I)^2$;

(4) poiché $(A-I)^2c_3 = 0$, c_4 deve essere un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A-I)^3$.

Tenuto conto che:

- $\dim \operatorname{Ker} A = 1$
- $\dim \operatorname{Ker}(A-I) = 1$
- $\dim \operatorname{Ker}(A-I)^2 = 2$ e $\operatorname{Ker}(A-I) \subset \operatorname{Ker}(A-I)^2$
- $\dim \operatorname{Ker}(A-I)^3 = 3$ e $\operatorname{Ker}(A-I)^2 \subset \operatorname{Ker}(A-I)^3$

si deduce la seguente procedura per determinare $c_1, \ldots, c_4$:

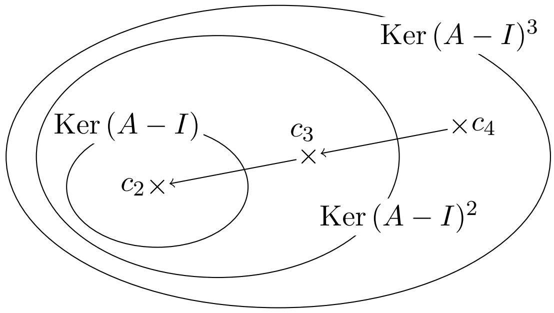
(1) $c_1 =$ un qualsiasi elemento non nullo di $\operatorname{Ker} A$;

(2) $c_4 =$ un qualsiasi elemento di $\operatorname{Ker}(A-I)^3$ *non appartenente* a $\operatorname{Ker}(A-I)^2$;

(3) $c_3 = (A-I)c_4$ (e quindi $c_3 \in \operatorname{Ker}(A-I)^2$ ma $c_3 \notin \operatorname{Ker}(A-I)$);

(4) $c_2 = (A-I)c_3$ (e quindi $c_2 \in \operatorname{Ker}(A-I)$ e $c_2 \neq 0$ — altrimenti $c_3 \ldots$).

Il grafico seguente schematizza il procedimento per determinare c_2, c_3 e c_4:



Nel caso in esame si ha:

$$\operatorname{Ker} A = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

e

$$\operatorname{Ker}(A-I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle, \ \operatorname{Ker}(A-I)^2 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle, \ \operatorname{Ker}(A-I)^3 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Si osservi che si è scelto di ottenere una base di $\operatorname{Ker}(A-I)^2$ *aggiungendo* un elemento a quella di $\operatorname{Ker}(A-I)$, e una base di $\operatorname{Ker}(A-I)^3$ *aggiungendo* un elemento a quella di $\operatorname{Ker}(A-I)^2$.

Allora possiamo scegliere:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$c_3 = (A-I)c_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c_2 = (A-I)c_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una matrice che realizza la similitudine è quindi:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(<u>Esercizio</u>: verificare che C è invertibile e che $AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$.)

3.20 Esempio

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

Si vuole determinare la forma canonica di Jordan di A ed una matrice che realizza la similitudine.

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p(x) = (3 - x)^4$$

dunque vi è un solo autovalore, 3, di molteplicità algebrica quattro. Inoltre: $\dim \operatorname{Ker}(A - 3I) = 2$ e $\dim \operatorname{Ker}(A - 3I)^2 = 4$, quindi la forma canonica di Jordan contiene *due* blocchi associati all'autovalore 3, entrambi necessariamente di dimensione due.

La forma canonica di A è quindi:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_2(3), J_2(3))$$

Cerchiamo adesso $c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{C}^4$ *linearmente indipendenti* tali che, posto:

$$C = (c_1, \ldots, c_4) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

si abbia:

$$AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$$

Leggendo quest'ultima uguaglianza per colonne si ottiene:

(1) $Ac_1 = 3c_1$;

(2) $Ac_2 = c_1 + 3c_2$, ovvero: $(A - 3I)c_2 = c_1$;

(3) $Ac_3 = 3c_3$;

(4) $Ac_4 = c_3 + 3c_4$, ovvero: $(A - 3I)c_4 = c_3$.

Dalle uguaglianze si deduce che:

(1) c_1 deve essere un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A - 3I)$;

(2) poiché $(A - 3I)c_1 = 0$, c_2 deve essere un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A - 3I)^2$;

(3) anche c_3 deve essere un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A - 3I)$;

(4) poiché $(A - I)c_3 = 0$, anche c_4 deve essere un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A - 3I)^2$.

Tenuto conto che:

- $\dim \operatorname{Ker}(A - 3I) = 2$;
- $\dim \operatorname{Ker}(A - 3I)^2 = 4$ e $\operatorname{Ker}(A - 3I) \subset \operatorname{Ker}(A - 3I)^2$

si deduce la seguente procedura per determinare $c_1 \ldots, c_4$:

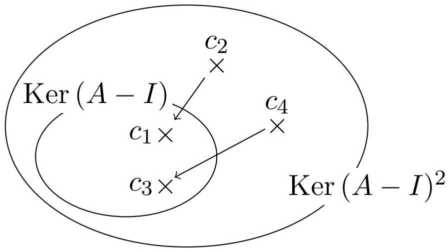
(1) $c_2 =$ un qualsiasi elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A-3I)^2$ *non appartenente* a $\operatorname{Ker}(A-3I)$;

(2) $c_4 =$ un elemento non nullo di $\operatorname{Ker}(A - 3I)^2$ *non appartenente* a $\operatorname{Ker}(A - 3I)$ e *linearmente indipendente* da c_2 (certamente esistente perché $\dim \operatorname{Ker}(A - 3I) = 2$ e $\dim \operatorname{Ker}(A - 3I)^2 = 4$);

(3) $c_1 = (A - 3I)c_2$ (e quindi $c_1 \in \operatorname{Ker}(A - 3I)$ e $c_1 \neq 0$ — altrimenti $c_2 \ldots$);

(4) $c_3 = (A - 3I)c_4$ (e quindi $c_3 \in \operatorname{Ker}(A - 3I)$ e $c_3 \neq 0$ — altrimenti $c_4 \ldots$).

Il grafico seguente schematizza il procedimento per determinare c_1, c_2, c_3 e c_4:



Nel caso in esame si ha:

$$\mathrm{Ker}\,(A-3I) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \,,\ \mathrm{Ker}\,(A-3I)^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Si osservi che si è scelto di ottenere una base di $\mathrm{Ker}\,(A-3I)^2$ *aggiungendo* due elementi a quella di $\mathrm{Ker}\,(A-3I)$.

Allora possiamo scegliere:

$$c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$c_1 = (A-3I)c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c_3 = (A-3I)c_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una matrice che realizza la similitudine è quindi:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si osservi che la scelta fatta di c_2 e c_4 corrisponde proprio agli elementi aggiunti alla base di $\mathrm{Ker}\,(A-3I)$ per ottenere la base di $\mathrm{Ker}\,(A-3I)^2$. *Scelte diverse da questa non garantiscono che $(A-3I)c_2$ e $(A-3I)c_4$ risultino linearmente indipendenti.* Ad esempio, scegliendo:

$$c_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c_4' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si ottengono:

$$c_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che *non* sono linearmente indipendenti.

3.21 Osservazione

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice ad elementi reali, $\mathrm{FCJ}(A)$ la forma canonica di Jordan di A e $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice che realizza la similitudine. *Se A ha qualche autovalore non reale* (ovvero: se qualcuno degli autovalori di A è un numero complesso con parte immaginaria non nulla), *allora* $\mathrm{FCJ}(A)$ *non è ad elementi reali e neppure C*. Infatti: gli autovalori di A sono gli elementi sulla diagonale di $\mathrm{FCJ}(A)$, che dunque non può essere ad elementi reali. Inoltre, poiché C è una matrice che realizza la similitudine si ha:

$$C^{-1}AC = \mathrm{FCJ}(A)$$

e se C fosse ad elementi reali lo sarebbe anche C^{-1} e di conseguenza $C^{-1}AC$, ossia $\mathrm{FCJ}(A)$.

Negli esempi precedenti la matrice A è ad elementi reali e lo stesso accade per la forma canonica di Jordan di A e per la matrice che realizza la similitudine. Questo è dovuto al fatto che *tutti gli autovalori di A sono reali.* Si ha infatti: *Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è ad elementi reali e tutti gli autovalori di A sono reali — e quindi la forma canonica di Jordan di A ha elementi reali —, allora esiste una matrice $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ad elementi reali che realizza la similitudine.*

Applicazioni: diagonalizzazione di matrici simmetriche e di matrici hermitiane

Si ricordi che una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di elementi a_{ij}, è *simmetrica* se per ogni i, j si ha $a_{ji} = a_{ij}$, ovvero $A^{\mathsf{T}} = A$. Ad esempio, la matrice B dell'Esempio 1.1:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{k_2}{m} \end{bmatrix}$$

risulta simmetrica per ogni valore (positivo) di m, k_1 e k_2.

In questa sezione si mostra che *una matrice di $\mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica è diagonalizzabile ed esiste una matrice ortogonale che realizza la similitudine.* Il risultato si ottiene facilmente dopo aver introdotto la nozione di *matrice hermitiana* e mostrato che *una matrice di $\mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana è diagonalizzabile ed esiste una matrice unitaria che realizza la similitudine.*

Se A è la matrice di elementi $a_{ij} \in \mathbb{C}$, la matrice A^{H}, *trasposta coniugata* di A, è la matrice che si ottiene prendendo la trasposta di A e facendo il coniugato di ciascuno dei suoi elementi.

3.22 Esempio

Se:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & i \\ 1+i & 0 & 2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$$

allora:

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ -2 & 0 \\ i & 2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$$

e:

$$A^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 3 & 1-i \\ -2 & 0 \\ -i & -2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$$

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ di elementi a_{ij}, si dice *hermitiana* se per ogni i, j si ha $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, ovvero se $A^{\mathsf{H}} = A$. Si osservi che *se A è hermitiana, allora gli elementi sulla diagonale a_{ii} sono reali.*

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice, $\mathrm{FCJ}(A)$ la sua forma canonica di Jordan e $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice che realizza la similitudine, ovvero tale che:

$$A = C\,\mathrm{FCJ}(A)\,C^{-1}$$

Sia infine U, T una fattorizzazione QR della matrice C, ovvero: $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice unitaria e $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice triangolare superiore tali che:

$$C = UT$$

Poiché C è invertibile, la matrice T risulta a sua volta invertibile.

Utilizzando la fattorizzazione QR di C, la matrice A si riscrive:

$$A = UT\,\mathrm{FCJ}(A)\,T^{-1}U^{\mathsf{H}}$$

Posto $\Theta = T\,\mathrm{FCJ}(A)\,T^{-1}$, si ha:

- $\Theta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è *triangolare superiore* (in quanto prodotto di matrici triangolari superiori*);
- $A = U\Theta U^{\mathsf{H}}$

3.23 Osservazione

Si ricordi che essendo U unitaria si ha $U^H = U^{-1}$ e quindi A e Θ risultano simili. Quanto appena mostrato prova quindi che: *Ogni matrice di $\mathbb{C}^{n\times n}$ è simile ad una matrice triangolare, ed esiste una matrice unitaria che realizza la similitudine.*

Se A è hermitiana, ovvero $A = A^{\mathsf{H}}$, dall'ultima equazione si ottiene:

$$U\Theta U^{\mathsf{H}} = (U\Theta U^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = U\Theta^{\mathsf{H}}U^{\mathsf{H}}$$

da cui si deduce:

$$\Theta = \Theta^{\mathsf{H}}$$

cioè: *la matrice Θ è hermitiana.* Questa proprietà di Θ, insieme a quella di essere triangolare superiore, consente di concludere che Θ *è diagonale e ad elementi reali.*

Dunque si è ottenuto che: Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è hermitiana, esistono $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria e $\Theta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonale e ad elementi reali tali che:

$$A = U\Theta U^{\mathsf{H}}$$

Formulazioni equivalenti di questo risultato sono:

- *Una matrice di $\mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana ha autovalori reali, è diagonalizzabile ed esiste una matrice unitaria che realizza la similitudine.*
- *Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è hermitiana allora gli autovalori di A sono reali ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori di A.*

Sia adesso $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice simmetrica. Come elemento di $\mathbb{C}^{n\times n}$, la matrice A è hermitiana e quindi, per quanto appena mostrato, *tutti gli autovalori di A sono reali.* Dunque, la matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è ad elementi reali e tutti gli autovalori di A sono reali. Per l'Osservazione 3.21, la forma canonica di Jordan di A è ad elementi reali ed esiste una matrice C ad elementi reali che realizza la similitudine. Ripetendo i passaggi fatti sopra e tenendo conto che adesso U è una matrice di $\mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale, si ottengono gli asserti equivalenti:

- *Una matrice di $\mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica è diagonalizzabile ed esiste una matrice ortogonale che realizza la similitudine.*
- *Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è simmetrica allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A.*

*L'inversa di una matrice triangolare superiore (invertibile) è triangolare superiore.

Applicazioni: Equazioni differenziali omogenee

Consideriamo il sistema di due equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x_1'' = -x_1 + x_2 \\ x_2'' = -x_2 \end{cases}$$

che, introducendo i vettori x di componenti x_1, x_2, x'' di componenti x_1'', x_2'' e la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si riscrive:

$$x'' = Ax$$

La matrice $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ non è diagonalizzabile, dunque non esistono variabili utilizzando le quali il sistema si riduce ad equazioni *disaccoppiate*.

La matrice A è comunque *in forma di Jordan*, e le soluzioni possono essere determinate come segue.

- Dalla *seconda* equazione, nella sola funzione incognita x_2, si deduce che *tutte le funzioni* $x_2(t)$ *che verificano il sistema hanno la forma*:

  $$x_2(t) = a_2 \operatorname{sen} t + b_2 \cos t$$

  per qualche $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

- Assegnati a_2, b_2 numeri reali non entrambi nulli, la prima equazione del sistema, *adesso nella sola incognita* x_1*,* è *non omogenea*:

  $$x_1'' = -x_1 + a_2 \operatorname{sen} t + b_2 \cos t$$

  Analogamente a quanto accade per i sistemi di equazioni lineari, se $x_1^p(t)$ è *una* soluzione dell'equazione, e ricordando che le funzioni $a_1 \operatorname{sen} t + b_1 \cos t$, per ogni $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, sono tutte le soluzioni dell'equazione *omogenea associata* $x_1'' = -x_1$, *tutte* le soluzioni sono:

  $$x_1(t) = x_1^p(t) + a_1 \operatorname{sen} t + b_1 \cos t$$

  Una soluzione dell'equazione, che può essere ottenuta con tecniche elementari note dall'Analisi Matematica, è:

  $$x_1^p(t) = \tfrac{t}{2}(b_2 \operatorname{sen} t - a_2 \cos t)$$

Dunque, tutte le soluzioni del sistema sono:

$$x_1(t) = \tfrac{t}{2}(b_2 \operatorname{sen} t - a_2 \cos t) + a_1 \operatorname{sen} t + b_1 \cos t \quad , \quad x_2(t) = a_2 \operatorname{sen} t + b_2 \cos t$$

e, come negli esempi descritti nel Capitolo 1, il valore dei parametri a_1, b_1, a_2 e b_2 che individua la soluzione effettiva del sistema è determinato dalle condizioni iniziali.

In generale, se si ha un sistema di equazioni differenziali caratterizzato da una matrice *non diagonalizzabile,* si può in ogni caso individuare un insieme di variabili utilizzando le quali il sistema risulta caratterizzato da una matrice in forma di Jordan. Le soluzioni di quest'ultimo sistema si determinano, come illustrato sopra, risolvendo *singole equazioni*, alcune omogenee altre non omogenee, con tecniche elementari.

Applicazioni: calcolo di A^k

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e k un intero positivo. In questa sezione si mostra, con alcuni esempi, come utilizzare la forma canonica di Jordan di A per calcolare A^k.

3.24 Osservazione

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathrm{FCJ}(A)$ la forma canonica di A e $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice che realizza la similitudine.

Poiché $A = C\,\mathrm{FCJ}(A)\,C^{-1}$, si ha:

$$A^2 = C\,\mathrm{FCJ}(A)\,C^{-1}C\,\mathrm{FCJ}(A)\,C^{-1} = C\,\mathrm{FCJ}(A)^2\,C^{-1}$$

Analogamente, per ogni intero $k \geqslant 2$ si ha:

$$A^k = C\,\mathrm{FCJ}(A)^k\,C^{-1}$$

Dunque, per determinare le potenze di A è sufficiente saper determinare le potenze di matrici in forma di Jordan.

3.25 Esempio

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice $J_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Posto:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha:

- $J_2(\lambda) = \lambda I + N_1$
- $N_1^2 = 0$ e quindi $N_1^k = 0$ per ogni intero $k > 2$.

Allora si ottiene:

- $J_2(\lambda)^2 = (\lambda I + N_1)(\lambda I + N_1) = \lambda^2 I + 2\lambda N_1 + N_1^2 = \lambda^2 I + 2\lambda N_1$;
- $J_2(\lambda)^3 = (\lambda^2 I + 2\lambda N_1 + N_1^2)(\lambda I + N_1) = \lambda^3 I + 3\lambda^2 N_1 + 3\lambda N_1^2 + N_1^3 = \lambda^3 I + 3\lambda^2 N_1$.

Se ne deduce che, posto $N_1^0 = I$, per ogni $k \geqslant 1$ si ha:†

$$J_2(\lambda)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N_1^j = \lambda^k I + k\lambda^{k-1} N_1$$

ovvero:

$$J_2(\lambda)^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

3.26 Esempio

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice $J_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

Posto:

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha:

- $J_3(\lambda) = \lambda I + N_2$

† Si ricordi che $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$

- $N_2^3 = 0$ e quindi $N_2^k = 0$ per ogni intero $k > 3$.

Allora, procedendo analogamente all'esempio precedente si ottiene:

- $J_3(\lambda)^2 = \lambda^2 I + 2\lambda N_2 + N_2^2$;
- $J_3(\lambda)^3 = \lambda^3 I + 3\lambda^2 N_2 + 3\lambda N_2^2 + N_2^3 = \lambda^3 I + 3\lambda^2 N_2 + 3\lambda N_2^2$.

Se ne deduce che, posto $N_2^0 = I$, per ogni $k \geqslant 1$ si ha:

$$J_3(\lambda)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N_2^j = \lambda^k I + k\lambda^{k-1} N_2 + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} N_2^2$$

ovvero (<u>Esercizio</u>: determinare N_2^2):

$$J_3(\lambda)^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

3.27 Esempio

Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice $A = \operatorname{diag}(J_2(\lambda_1), J_2(\lambda_2)) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.
Si constata che:

$$A^2 = \begin{bmatrix} J_2(\lambda_1)^2 & \\ & J_2(\lambda_2)^2 \end{bmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{bmatrix} J_2(\lambda_1)^3 & \\ & J_2(\lambda_2)^3 \end{bmatrix}$$

Per $k \geqslant 1$ si ha perciò:

$$A^k = \operatorname{diag}(J_2(\lambda_1)^k, J_2(\lambda_2)^k)$$

ovvero:

$$A^k = \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & & \\ & \lambda_1^k & & \\ \hline & & \lambda_2^k & k\lambda_2^{k-1} \\ & & & \lambda_2^k \end{array}\right]$$

3.28 Problema

- Decidere se sia vero o falso l'asserto: *Se* $\mathrm{FCJ}(A)$ *è la forma canonica di Jordan di A, allora la forma canonica di Jordan di* A^2 *è* $\mathrm{FCJ}(A)^2$.

  (Suggerimento: Verificare l'asserto per $A = J_2(1)$.)

- Per ogni $k \geqslant 1$, determinare tutti gli elementi delle le potenze k-esime delle seguenti matrici in forma di Jordan:

$$\operatorname{diag}(J_1(2), J_2(-2)) \quad , \quad \operatorname{diag}(J_2(i), J_2(i)) \quad , \quad \operatorname{diag}(J_3(3), J_1(1+i))$$

Applicazioni: decomposizione di $\mathbb{C}^n$ in somma diretta di sottospazi invarianti

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. In questa sezione si definisce la nozione di *sottospazio invariante per l'applicazione lineare definita da* A e si mostra, con alcuni esempi, come utilizzare la forma canonica di Jordan di A per determinare una decomposizione di $\mathbb{C}^n$ in somma diretta di sottospazi invarianti per l'applicazione definita da A.

Siano V uno spazio vettoriale e $L : V \to V$ un'applicazione lineare. Un sottospazio vettoriale $W \subset V$ si chiama *sottospazio invariante per* L se per ogni $w \in W$ si ha $L(w) \in W$, ovvero: $L(W) \subseteq W$.‡

3.29 Osservazione

Il sottospazio W generato da $w_1, \dots, w_j$ è invariante per L se e solo se:

$$L(w_1) \in W, \dots, L(w_j) \in W$$

(Esercizio: dimostrare l'asserto.)

3.30 Esempio

Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'applicazione è una rotazione (esercizio: individuare l'asse di rotazione e l'angolo)

I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ definiti da $\langle e_1, e_2 \rangle$ e da $\langle e_3 \rangle$ sono invarianti per L (esercizio: verificare l'asserto).

3.31 Esempio

Siano λ_1, λ_2 numeri complessi distinti e $A = \mathrm{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_1), J_2(\lambda_2)) \in \mathbb{C}^{5\times 5}$. I sottospazi di $\mathbb{C}^5$ definiti da:

$$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \quad , \quad \langle e_4, e_5 \rangle$$

sono invarianti per l'applicazione lineare definita da A. Infatti, per il prino sottospazio si ha:

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1 \quad , \quad Ae_2 = \lambda_1 e_2 \quad , \quad Ae_3 = e_2 + \lambda_1 e_3$$

Analogamente si constata l'asserto per il secondo sottospazio.

Inoltre si ha:

- $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_1 I)^2$ e $\langle e_4, e_5 \rangle = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_2 I)^2$
- $\mathbb{C}^5 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \oplus \langle e_4, e_5 \rangle$

cioè:

$$\mathbb{C}^5 = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_1 I)^2 \oplus \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_2 I)^2$$

3.32 Osservazione

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, FCJ$(A)$ la forma canonica di Jordan di A e C una matrice che realizza la similitudine. Allora: *il sottospazio* W *è invariante per l'applicazione definita da* FCJ(A) *se e solo se il sottospazio* CW *è invariante per l'applicazione definita da* A.§

‡Si ricordi che: $L(W) = \{\, L(w) \in \mathbb{C}^n$ tali che $w \in W \,\}$.

§Si ricordi che: $CW = \{\, Cw \in \mathbb{C}^n$ tali che $w \in W \,\}$.

(Infatti: l'asserto $\mathrm{FCJ}(A)\, W \subset W$ è equivalente a $C\,\mathrm{FCJ}(A)\, W \subset CW$, ovvero a $A(CW) \subset CW$.)

3.33 Esempio

Siano $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, $\mathrm{FCJ}(A)$ e $C = (c_1, \ldots, c_4)$ come nell'Esempio 3.18. Allora:

- I sottospazi $S_1 = \langle c_1 \rangle, S_2 = \langle c_2 \rangle$ e $S_{34} = \langle c_3, c_4 \rangle$ sono invarianti per l'applicazione lineare definita da A;
- $\mathbb{C}^4 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_{34}$.

Sia adesso:

$$D = (d_1, \ldots, d_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora:

- D è una matrice *diversa da* C che realizza la similitudine tra A e $\mathrm{FCJ}(A)$;
- I sottospazi $T_1 = \langle d_1 \rangle, T_2 = \langle d_2 \rangle$ e $T_{34} = \langle d_3, d_4 \rangle$ sono invarianti per l'applicazione lineare definita da A;
- $\mathbb{C}^4 = T_1 \oplus T_2 \oplus T_{34}$;
- $T_1 = S_1$, $T_2 \neq S_2$ e $T_{34} \neq S_{34}$.

Questo significa che le decomposizioni in sottospazi invarianti trovate:

$$\mathbb{C}^4 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_{34} \quad \text{e} \quad \mathbb{C}^4 = T_1 \oplus T_2 \oplus T_{34}$$

non sono "canoniche," ovvero non sono *caratteristiche di A*.

Invece, *è canonica* la decomposizione:

$$\mathbb{C}^4 = \langle c_1 \rangle \oplus \langle c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle d_1 \rangle \oplus \langle d_2, d_3, d_4 \rangle$$

infatti si ha:

$$\langle c_1 \rangle = \langle d_1 \rangle = \mathrm{Ker}\, A$$

e

$$\langle c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle d_2, d_3, d_4 \rangle = \mathrm{Ker}\, (A - I)^2$$

Il seguente asserto descrive la situazione generale:

3.34 Teorema

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A. Infine, per $j = 1, \ldots, k$ sia δ_j la massima dimensione dei blocchi associati a λ_j in $\mathrm{FCJ}(A)$.

La decomposizione canonica di $\mathbb{C}^n$ in sottospazi invarianti dell'applicazione definita da A è:

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\, (A - \lambda_1 I)^{\delta_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, (A - \lambda_k I)^{\delta_k}$$

3.35 Problema

Siano $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tali che:

- $\mathrm{FCJ}(A_1) = \mathrm{diag}(J_1(1), J_1(1), J_2(2))$

- $\mathrm{FCJ}(A_2) = \mathrm{diag}(J_1(1), J_1(1), J_1(1), J_1(1))$
- $\mathrm{FCJ}(A_3) = \mathrm{diag}(J_1(1), J_1(1), J_1(2), J_1(3))$

Per ciascuna matrice, determinare la decomposizione canonica di $\mathbb{C}^4$ in sottospazi invarianti. (Soluzione: $\mathbb{C}^4 = \mathrm{Ker}\,(A_1 - I) \oplus \mathrm{Ker}\,(A_1 - 2I)^2$, $\mathbb{C}^4 = \mathrm{Ker}\,(A_2 - I)$ e $\mathbb{C}^4 = \mathrm{Ker}\,(A_3 - I) \oplus \mathrm{Ker}\,(A_3 - 2I) \oplus \mathrm{Ker}\,(A_3 - 3I)$.)