Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Capitolo 1

Diagonalizzazione di matrici: Autovalori ed autovettori

M. Ciampa

Ingegneria Elettrica, a.a. 2009/2010

Capitolo 1

Diagonalizzazione di matrici: Autovalori ed autovettori

Sia $\mathbb{K}$ un campo (ad esempio $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{Q}$).

Si ricordi che:

- Per ogni n intero positivo, $\mathbb{K}^n$ è l'usuale spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ delle colonne di n elementi di $\mathbb{K}$
- Per n ed m interi positivi, $\mathbb{K}^{n\times m}$ è l'usuale spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ delle matrici $n \times m$ ad elementi in $\mathbb{K}$

Inoltre: se A è una matrice $n \times m$ ad elementi in $\mathbb{K}$:

- $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ è *l'applicazione lineare definita da* A, ovvero l'applicazione definita per ogni $x \in \mathbb{K}^m$ da:
$$L_A(x) = Ax$$
- $\operatorname{Ker} A$ è il *nucleo* dell'applicazione L_A:
$$\operatorname{Ker} A = \{ \, x \in \mathbb{K}^m \text{ tali che } Ax = 0 \, \}$$
ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$
- $\operatorname{Im} A$ è l'*immagine* dell'applicazione L_A:
$$\operatorname{Im} A = \{ \, y \in \mathbb{K}^n \text{ tali che } y = Ax \text{ per qualche } x \in \mathbb{K}^m \, \}$$
ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ la cui dimensione è il *rango* di A, $\operatorname{rk} A$
- Sussiste la seguente *formula della dimensione*:
$$\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A) = m$$

Se $v_1, \dots, v_k$ sono elementi di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, useremo la sigla:
$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle$$
per indicare il sottospazio vettoriale di V costituito da tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_k$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.*

*Un'altra sigla comunemente usata per indicare lo stesso sottospazio è: $\operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k)$.

Con questa notazione, indicando con $a_1, \ldots, a_m$ le colonne di A, si ha:

$$\operatorname{Im} A = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$$

Infine, per ogni intero positivo n, useremo il simbolo I per indicare la matrice identica in $\mathbb{K}^{n \times n}$.

In questo capitolo si studia il problema della *diagonalizzazione* di matrici di $\mathbb{K}^{n \times n}$. Per prima cosa si introduce la nozione di *matrici simili* e la si utilizza per formulare il problema. Poi si definiscono le fondamentali nozioni di *autovalore* ed *autovettore* di una matrice e si utilizzano per descrivere una procedura che consente, per ciascuna matrice di $\mathbb{K}^{n \times n}$, di risolvere il problema posto.

1.1 Matrici simili: diagonalizzazione

In questa sezione si introduce, presentando alcuni esempi di origine fisica, la nozione di *matrici simili* ed il problema della *diagonalizzazione di una matrice*.

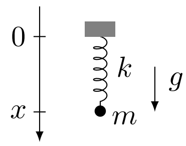
Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi $a_{ij} \in \mathbb{K}$. La matrice si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Per $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, la notazione

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

indica la matrice $n \times n$ diagonale di elementi $a_{kk} = \alpha_k$.

1.1 Esempio

- Si consideri un punto materiale pesante collegato al soffitto da una molla ideale (ovvero: di lunghezza a riposo nulla e che esercita una forza proporzionale alla sua lunghezza) e si supponga che il moto del punto sia solo verticale. Detta m la massa del punto, k la costante elastica della molla ed introdotto un sistema di riferimento come in figura, l'*equazione di moto* del punto si ottiene dalla Legge di Newton:



$$mx'' = mg - kx$$

Ad ogni istante t, il valore $x(t)$ è la coordinata del punto all'istante t. Un *moto* del punto è una *soluzione dell'equazione di moto*, ovvero una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ — cioè con derivata seconda continua — che per ogni istante t verifica l'equazione:

$$mx''(t) = mg - kx(t)$$

Come usuale, riscriviamo l'equazione di moto nella forma *equivalente* (cioè con le stesse soluzioni):

$$x'' = g - \tfrac{k}{m}\, x$$

Le *posizioni di equilibrio* del punto sono le soluzioni costanti dell'equazione di moto (i moti in cui la posizione del punto rimane invariata nel tempo). In questo caso c'è una sola soluzione costante e vale:

$$x(t) = x_E = \tfrac{mg}{k}$$

Detta u la coordinata che individua lo scostamento del punto dalla posizione di equilibrio, si ha:

$$x = u + x_E$$

Poiché x_E è una funzione costante, una funzione x risulta soluzione dell'equazione di moto se e solo se la funzione $u = x - x_E$ è soluzione dell'equazione:

$$u'' = -\frac{k}{m}\, u$$

Tutte le soluzioni di quest'ultima equazione sono:

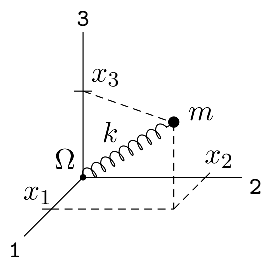
$$u = a \operatorname{sen}(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t) + b \cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t) \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

dunque *tutti* i moti possibili del punto sono:

$$x = a \operatorname{sen}(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t) + b \cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t) + x_E \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Il moto effettivo del punto è l'unico individuato dalle *condizioni iniziali*, ossia dalla posizione e velocità del punto all'istante $t = 0$.

- Si consideri adesso un punto materiale di peso trascurabile collegato ad un punto fisso Ω dello spazio da una molla ideale. Detta m la massa del punto, k la costante elastica della molla ed introdotto un sistema di riferimento come in figura, le equazioni di moto del punto (questa volta tre) si ottengono dalla Legge di Newton:



$$\begin{cases} m x_1'' = -k x_1 \\ m x_2'' = -k x_2 \\ m x_3'' = -k x_3 \end{cases}$$

che si riscrivono:

$$\begin{cases} x_1'' = -\frac{k}{m}\, x_1 \\ x_2'' = -\frac{k}{m}\, x_2 \\ x_3'' = -\frac{k}{m}\, x_3 \end{cases}$$

Il punto ha come unica posizione di equilibrio l'origine degli assi, dunque x_1, x_2 ed x_3 individuano anche lo scostamento del punto dalla posizione di equilibrio.

Le tre equazioni ottenute sono *disaccoppiate*, ovvero ciascuna di esse è un'equazione in *una sola incognita*, perciò tutte le soluzioni (e quindi tutti i moti) si ottengono facilmente ripetendo, per ciascuna equazione, quanto detto nell'esempio precedente:

$$x_j = a_j \operatorname{sen}(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t) + b_j \cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t) \quad , \quad a_j, b_j \in \mathbb{R} \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

Di nuovo, il moto effettivo del punto è l'unico individuato dalle condizioni iniziali, ossia dalla posizione e velocità del punto all'istante $t = 0$.

Introducendo il vettore x di componenti le coordinate x_1, x_2 ed x_3, il vettore x'' di componenti le derivate x_1'', x_2'' ed x_3'', e la matrice

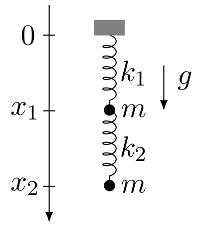
$$A = \begin{bmatrix} \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

le equazioni di moto si riscrivono nella forma:

$$x'' = -Ax$$

Il disaccoppiamento delle equazioni si traduce nella proprietà della matrice A di essere *diagonale*.

- Si considerino infine due punti materiali pesanti collegati al soffitto da molle ideali, come indicato in figura.



Supponendo che il moto dei punti sia solo verticale, detta m la massa di ciascun punto, k_1, k_2 le costanti elastiche delle molle ed introdotto il sistema di riferimento come in figura, le equazioni di moto del punto (questa volta due) si ottengono dalla Legge di Newton:

$$\begin{cases} mx_1'' = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + mg \\ mx_2'' = -k_2(x_2 - x_1) + mg \end{cases}$$

che si riscrivono:

$$\begin{cases} x_1'' = -\frac{k_1+k_2}{m}\, x_1 + \frac{k_2}{m}\, x_2 + g \\ x_2'' = \frac{k_2}{m}\, x_1 - \frac{k_2}{m}\, x_2 + g \end{cases}$$

Le posizioni di equilibrio dei punti sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} -\frac{k_1+k_2}{m}\, x_1 + \frac{k_2}{m}\, x_2 + g = 0 \\ \frac{k_2}{m}\, x_1 - \frac{k_2}{m}\, x_2 + g = 0 \end{cases}$$

Detto x il vettore di componenti le coordinate x_1, x_2 e posto:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{k_2}{m} \end{bmatrix}$$

si constata che la matrice B è invertibile per tutti i valori positivi di m, k_1 e k_2 e quindi ciascun punto ha una sola posizione di equilibrio data da:

$$\begin{bmatrix} x_{1E} \\ x_{2E} \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} g \\ g \end{bmatrix}$$

Introducendo le coordinate u_1, u_2 che individuano lo scostamento di ciascun punto dalla rispettiva posizione di equilibrio:

$$x_1 = u_1 + x_{1E} \quad , \quad x_2 = u_2 + x_{2E}$$

ed utilizzando i vettori:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad , \quad u'' = \begin{bmatrix} u''_1 \\ u''_2 \end{bmatrix}$$

si ottengono le equazioni:

$$u'' = Bu \quad (*)$$

Contrariamente a quanto accaduto nell'esempio precedente, la matrice B del sistema *non è diagonale* dunque le equazioni *non sono disaccoppiate.* Questo rende non evidente come sia possibile determinare le soluzioni.

Cerchiamo di "ricondurci al caso di equazioni disaccoppiate."

Siano $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matrice *invertibile* e v il vettore definito da:

$$u = Sv$$

L'invertibilità della matrice garantisce che le componenti del vettore v sono *nuove variabili* utilizzabili per descrivere la posizione dei punti.

Inoltre: se u è una soluzione delle equazioni $(*)$ allora il vettore $v = S^{-1}u$ ha componenti di classe $\mathcal{C}^2$ e per ogni t si ha:

$$v''(t) = \begin{bmatrix} v''_1(t) \\ v''_2(t) \end{bmatrix} = S^{-1}u''(t) = S^{-1}Bu(t) = S^{-1}BSv(t)$$

cioè v è soluzione delle equazioni

$$v'' = S^{-1}BSv \quad (**)$$

e: se v è soluzione delle equazioni $(**)$ allora il vettore $u = Sv$ ha componenti di classe $\mathcal{C}^2$ e per ogni t si ha:

$$u''(t) = Sv''(t) = BSv(t) = Bu(t)$$

cioè u è soluzione delle equazioni $(*)$.

Il problema che si pone è di *determinare una matrice $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertibile tale che $S^{-1}BS$ risulti diagonale.* In tal caso, infatti, il sistema $(**)$ risulta composto da equazioni disaccoppiate (quindi è facile determinare tutte le possibili soluzioni v_1, v_2) ed i moti dei punti (cioè le funzioni x_1 ed x_2) sono immediatamente ricavabili da v_1, v_2.

1.2 Definizione (matrici simili)

Matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si dicono *simili* se esiste una matrice $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertibile tale che:

$$A = S^{-1}BS$$

In tal caso, si dice che la matrice S *realizza la similitudine* tra A e B.

1.3 Osservazione

La nozione di matrici simili può essere riletta in un diverso contesto.
Si ricordi che, detta $s_1, \ldots, s_n$ una base di $\mathbb{K}^n$:

- la matrice $S = (s_1, \ldots, s_n)$ è invertibile;

- se x' è l'elemento di $\mathbb{K}^n$ di componenti $x'_1, \dots, x'_n$, allora $x = Sx'$ è l'elemento di $\mathbb{K}^n$ che ha coordinate $x'_1, \dots, x'_n$ rispetto alla base $s_1, \dots, s_n$:
$$x = x'_1 s_1 + \cdots + x'_n s_n$$
- se $x \in \mathbb{K}^n$, allora $x' = S^{-1}x$ è il vettore di $\mathbb{K}^n$ di componenti le coordinate di x rispetto alla base $s_1, \dots, s_n$.

Si considerino poi $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e l'applicazione L_A da essa definita. Allora, la matrice:
$$S^{-1}AS$$
definisce l'azione di L_A nel "mondo delle coordinate" rispetto alla base $s_1, \dots, s_n$, ovvero: detto x' il vettore delle coordinate di x rispetto alla base $s_1, \dots, s_n$, il vettore delle coordinate di $L_A(x) = Ax$ rispetto alla base $s_1, \dots, s_n$ è $S^{-1}AS\,x'$.

1.4 Problema
La similitudine è una *relazione di equivalenza* tra elementi di $\mathbb{K}^{n\times n}$ ovvero:

(1) Per ogni $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, A è simile ad A (è *riflessiva*).

(2) Per ogni $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se A è simile a B allora B è simile ad A (è *simmetrica*).

(3) Per ogni $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se A è simile a B e B è simile a C allora A é simile a C (è *transitiva*).

La relazione $A = I^{-1}AI$ prova che l'asserto (1) è vero. Dimostrare, utilizzando la definizione di matrici simili, che anche gli asserti (2) e (3) sono veri.

1.5 Definizione (matrice diagonalizzabile)
Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si dice *diagonalizzabile* se esistono una matrice $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertibile e elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di $\mathbb{K}$ tali che
$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
ovvero, se A è simile ad una matrice diagonale. In tal caso la matrice $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si dice *forma diagonale di A*.

Nel seguito di questo capitolo si affronta il *problema della diagonalizzazione: decidere se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile e, eventualmente, determinare la forma diagonale di A ed una matrice che realizza la similitudine.*

1.2 Autovalori, autovettori

Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{K}$.

Si osservi che se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile, ovvero esistono una matrice $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertibile e elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di $\mathbb{K}$ tali che
$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
le colonne $s_1, \dots, s_n$ di S e gli elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verificano le uguaglianze
$$As_1 = \lambda_1 s_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad As_n = \lambda_n s_n$$
Viceversa, se elementi $s_1, \dots, s_n$ di $\mathbb{K}^n$ linarmente indipendenti e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di $\mathbb{K}$ verificano le uguaglianze
$$As_1 = \lambda_1 s_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad As_n = \lambda_n s_n$$

allora: la matrice S di colonne $s_1, \ldots, s_n$ risulta invertibile e rende vera la relazione

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

cioè A è diagonalizzabile. Dunque:

1.6 Osservazione

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile se e solo se esistono elementi $s_1, \ldots, s_n$ di $\mathbb{K}^n$ linearmente indipendenti ed elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di $\mathbb{K}$ tali che:

$$As_1 = \lambda_1 s_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad As_n = \lambda_n s_n$$

1.7 Definizione (autovalore, autovettore)

Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ si chiama *autovalore di* A se esiste un vettore *non nullo* v di $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$Av = \lambda v$$

Un vettore *non nullo* v di $\mathbb{K}^n$ si chiama *autovettore di* A se esiste un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che:

$$Av = \lambda v$$

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e v vettore non nullo di $\mathbb{K}^n$ sono tali che:

$$Av = \lambda v$$

allora λ si chiama autovalore di A *associato a* v e v si chiama autovettore di A *associato a* λ.

1.8 Esempio

(1) Sia I la matrice identica $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{R}$.

Allora:

- $1 \in \mathbb{R}$ è autovalore di I.
- Ogni vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$ è autovettore di I.
- Nessun $\lambda \in \mathbb{R}$ diverso da 1 è autovalore di I (se, ad esempio, $3 \in \mathbb{R}$ fosse autovalore di I, esisterebbe un vettore non nullo v di $\mathbb{R}^n$ tale che $Iv = 3\,v$, ma $Iv = v$ quindi $\ldots$).

(2) Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Allora:

- $1 \in \mathbb{R}$ è autovalore di A. Infatti, posto

$$v = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$Av = v$$

Questa uguaglianza rivela anche che 1 è autovalore di A associato a v e che v è autovettore di A associato a 1.

- $-1 \in \mathbb{R}$ è autovalore di A. Infatti, posto

  $$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  si ha:

  $$Aw = -w$$

  Questa uguaglianza rivela anche che -1 è autovalore di A associato a w e che w è autovettore di A associato a -1.
- v non è autovettore di A associato a -1, w non è autovettore di A associato a 1 (infatti ...)

(3) Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

La matrice A non ha autovalori. Infatti, se $\lambda \in \mathbb{R}$ fosse autovalore, esisterebbe un vettore $v \in \mathbb{R}^2$ non nullo di componenti v_1, v_2 tale che:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

ovvero tale che:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ma:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$$

e quindi ...

Ovviamente, la matrice A non ha autovettori.

Questo esempio mostra che *non tutte matrici hanno autovalori ed autovettori.*

(4) Sia:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Allora: $i \in \mathbb{C}$ è autovalore di B. Infatti, posto

$$v = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$Bv = i\, v$$

Questo esempio mostra che *è importante fare attenzione al campo a cui appartengono gli elementi della matrice*: la matrice B di questo esempio ha elementi in $\mathbb{C}$, la matrice A del punto (3) ha elementi in $\mathbb{R}$.

1.9 Problema

(1) Decidere se qualcuno dei vettori:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sia autovettore della matrice definita nel punto (2) dell'Esempio 1.8.

(2) Sia:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Utilizzare il ragionamento fatto nel punto (3) dell'Esempio 1.8 per dimostrare che $1 \in \mathbb{R}$ è autovalore di C.

(3) Dimostrare che se v è un autovettore di $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, esiste *un solo* $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $Av = \lambda\, v$.

Con la terminologia introdotta, l'Osservazione 1.6 si riformula:

1.10 Teorema

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{K}^n$ costituita da autovettori di A.

1.11 Esempio

La matrice identica $I \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *è diagonalizzabile*. Infatti, per quanto detto nel punto (1) dell'Esempio 1.8, qualunque base di $\mathbb{K}^n$ è costituita da autovettori di I.

La matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

del punto (3) dell'Esempio 1.8 *non è diagonalizzabile*, perchè non esiste una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A.

1.12 Problema

Dimostrare che: se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile e $\operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots, \lambda_n)$ è la forma diagonale di A, allora $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono autovalori di A.

1.3 Calcolo di autovalori ed autovettori: polinomio caratteristico ed autospazi

La sezione precedente si è conclusa osservando che per studiare il problema della diagonalizzabilità di una matrice occorre avere informazioni sui suoi autovalori ed autovettori. In questa sezione si affronta il problema di *determinare autovalori e autovettori di una matrice.* Precisamente, si mostra che gli autovalori di una matrice sono le radici di un opportuno polinomio – il *polinomio caratteristico* della matrice – e che, noto un autovalore della matrice, è semplice determinare tutti gli autovettori ad esso associati.

Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{K}$.

Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di A se e solo se:

$$\text{esiste un vettore non nullo } v \text{ di } \mathbb{K}^n \text{ tale che: } Av = \lambda\, v$$

ovvero:

$$\text{esiste un vettore non nullo } v \text{ di } \mathbb{K}^n \text{ tale che: } (A - \lambda\, I)v = 0$$

Questa condizione è soddisfatta se e solo se:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0$$

Dunque:

$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ è autovalore di } A \textit{ se e solo se } \det(A - \lambda\, I) = 0$$

Si osservi che *la condizione consente di decidere se λ è autovalore senza dover determinare un vettore v che verifica la definizione.*

1.13 Esempio
Sia:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$$

Per ogni $x \in \mathbb{K}$ si ha:

$$\det(A - x\,I) = (a_{11} - x)(a_{22} - x) - a_{12}a_{21} = (-x)^2 + (-x)(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Dunque: *per ogni matrice $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ la funzione* $\det(A - x\,I)$ *è un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado due.*

Quanto mostrato nell'esempio ha validità generale:

1.14 Definizione (polinomio caratteristico)
La funzione $p_A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definita da:

$$p_A(x) = \det(A - x\,I)$$

è un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado n detto *polinomio caratteristico di A.*

1.15 Problema
Per ciascuna delle seguenti matrici ad elementi in $\mathbb{R}$, determinare il polinomio caratteristico.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $p_A(x) = (1-x)(2-x)^2$]

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $p_A(x) = (-x)(2-x)^3$]

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $p_A(x) = (-x)^2(2-x)^2$]

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $p_A(x) = (-x)^4$]

(e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $p_A(x) = (-x)^4$]

Si ricordi che se p è un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$, una *radice* di p è un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $p(\alpha) = 0$. In tal caso, esistono un intero positivo m ed un polinomio q a coefficienti in $\mathbb{K}$ tali che:

$$q(\alpha) \neq 0 \quad \text{e} \quad p(x) = (\alpha - x)^m q(x)$$

e si dice che α è radice di p di *molteplicità* m.

La condizione necessaria e sufficiente affinché un elemento di $\mathbb{K}$ sia autovalore di A si esprime allora:

1.16 Teorema

Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se e solo se è radice del polinomio caratteristico di A. In tal caso, la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico si chiama *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ.

1.17 Esempio

- Sia:
  $$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
  Il polinomio caratteristico di A è:
  $$p_A(x) = \det(A - x\,I) = \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1$$
  Poiché p_A non ha radici (non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $p_A(\alpha) = 0$), A non ha autovalori.

- Sia:
  $$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$
  Il polinomio caratteristico di A è:
  $$p_A(x) = \det(A - x\,I) = \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1$$
  Poiché:
  $$p_A(x) = (i - x)(-i - x)$$
  gli autovalori di A sono: i e $-i$.

- Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ elementi di $\mathbb{K}$ e $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Il polinomio caratteristico di A è:
  $$p_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$$
  e gli autovalori di A sono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1.18 Problema

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ di elementi a_{ij} si dice *triangolare superiore* (rispettivamente: *triangolare inferiore*) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ (rispettivamente: $a_{ij} = 0$ per $i < j$). Dimostrare che se $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ di elementi t_{ij} è una matrice triangolare superiore, allora il polinomio caratteristico di T è:
$$p_T(x) = (t_{11} - x) \cdots (t_{nn} - x)$$

Una volta determinato un autovalore di A, gli autovettori di A ad esso associati sono semplici da determinare. Infatti, dalla definizione di autovettore associato si deduce che:

1.19 Osservazione

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di A, gli autovettori di A associati a λ sono tutti gli elementi non nulli di $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda\,I)$.

1.20 Definizione (autospazio)

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di A. Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ definito da $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda\, I)$ si chiama *autospazio di* A *associato a* λ e si indica con la sigla $V(\lambda)$.

L'intero $\dim V(\lambda)$ si chiama *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ, e vale almeno uno.

1.21 Esempio

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Gli autovalori di A sono: i e $-i$. Inoltre si ha:

$$V(i) = \mathrm{Ker}\,(A - i\, I) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

e:

$$V(-i) = \mathrm{Ker}\,(A + i\, I) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \rangle$$

Dunque, *tutti* gli autovettori di A associati a i sono ... e *tutti* gli autovettori di A associati a $-i$ sono ...

In conclusione:

- gli autovalori di A sono *tutte e sole* le radici del polinomio caratteristico di A;
- per ciascuno degli autovalori di A, gli autovettori associati sono *tutti e soli* gli elementi non nulli dell'autospazio associato.

1.4 Procedura per la diagonalizzazione

In questa sezione discutiamo una procedura che, per ciascuna matrice di $\mathbb{K}^{n\times n}$, consente di risolvere il problema della diagonalizzazione.

Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{K}$. *La procedura seguente consente di decidere se* A *sia diagonalizzabile e, in caso affermativo, determina la forma diagonale di* A *ed una matrice che realizza la similitudine tra* A *e la sua forma diagonale*:

(1) determinare l'elenco senza ripetizioni $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ degli autovalori di A;

(2) *se* A non ha autovalori, *allora* non è diagonalizzabile; *altrimenti*: per ciascun λ_j, determinare la dimensione dell'autospazio di A associato a λ_j:

$$d_1 = \dim V(\lambda_1), \ldots, d_k = \dim V(\lambda_k)$$

(3) *se* $d_1 + \cdots + d_k = n$ *allora*:

(3.1) A è diagonalizzabile

(3.2) la forma diagonale di A è:

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{d_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{d_k})$$

(3.3) da ciascun autospazio $V(\lambda_j)$, estrarre una base $b_1^{(j)}, \ldots, b_{d_j}^{(j)}$; una matrice che realizza la similitudine è:

$$S = (b_1^{(1)}, \ldots, b_{d_1}^{(1)}, \ldots, b_1^{(k)}, \ldots, b_{d_k}^{(k)})$$

altrimenti: A non è diagonalizzabile.

Per mostrare che la procedura effettivamente consente di fare quanto dichiarato, occorre discutere il punto (3).

Se $d_1 + \cdots + d_k = n$, è certamente possibile costruire la matrice S descritta nel punto (3.3). Inoltre, per come sono definite le solonne di S, è certamente verificata la relazione:

$$AS = S\,\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{d_k})$$

Per provare la diagonalizzabilità di A, occorre dimostrare che S risulta anche *invertibile.* Omettiamo la prova di quest'ultimo asserto limitandoci a constatare, negli esempi, che la matrice S di volta in volta determinata è invertibile.

Se invece $d_1+\cdots+d_k \neq n$, occorre provare che A non è diagonalizzabile. Le considerazioni che seguono provano l'asserto per assurdo, ovvero mostrano che *se A è diagonalizzabile, allora si ha $d_1 + \cdots + d_k = n$.*

Per prima cosa, si osservi che:

1.22 Osservazione

Se la matrice A è diagonale, allora:

(I) esistono elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di $\mathbb{K}$ a due a due distinti e interi positivi $n_1, \dots, n_k$ tali che:

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$$

e quindi (ricordando che p_A è un polinomio di grado n):

$$n_1 + \cdots + n_k = n$$

(II) per ogni $j = 1, \dots, k$ si ha:

$$d_j = \dim V(\lambda_j) = n_j$$

e quindi:

$$d_1 + \cdots + d_k = n$$

Per convincersi dell'asserto, si consideri il seguente esempio:

1.23 Esempio

Siano α e β elementi distinti di $\mathbb{K}$ e:

$$A = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$$

Il polinomio caratteristico di A è allora:

$$p_A(x) = (\alpha - x)^2(\beta - x)$$

dunque la condizione (I) è verificata con $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \beta$ e $n_1 = 2, n_2 = 1$.

L'autospazio associato all'autovalore α è:

$$V(\alpha) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{diag}(0, 0, \beta - \alpha)$$

e, siccome la matrice $\mathrm{diag}(0, 0, \beta - \alpha)$ ha rango uno (si ricordi che $\beta - \alpha \neq 0$), per la formula della dimensione si ha:

$$d_1 = \dim V(\alpha) = 2$$

Infine, l'autospazio associato all'autovalore β è:

$$V(\beta) = \text{Ker diag}(\alpha - \beta, \alpha - \beta, 0)$$

e, siccome la matrice $\text{diag}(\alpha - \beta, \alpha - \beta, 0)$ ha rango due, per la formula della dimensione si ha:

$$d_2 = \dim V(\beta) = 1$$

ed anche la condizione (II) è verificata.

In secondo luogo si ha:

1.24 Osservazione (invarianti per similitudine)
Se $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sono matrici simili, allora:

(1) Detti p_A il polinomio caratteristico di A e p_B quello di B si ha: $p_A = p_B$

(2) Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha: $\dim \text{Ker}\,(A - \lambda\, I) = \dim \text{Ker}\,(B - \lambda\, I)$.

Ovvero: *il polinomio caratteristico e la dimensione di ciascun autospazio sono invarianti per similitudine.*

Infatti:
(1) Per definizione, per ogni $x \in \mathbb{K}$ si ha:

$$p_A(x) = \det(A - x\, I)$$

ovvero, detta S la matrice che realizza la similitudine:

$$p_A(x) = \det(S^{-1}BS - x\, I)$$

Ma per ogni $x \in \mathbb{K}$ si ha:

$$S^{-1}BS - x\, I = S^{-1}(B - x\, I)S$$

e perciò, per il Teorema di Binet:

$$p_A(x) = \det S^{-1}\, \det(B - x\, I)\, \det S$$

Ricordando che $\det S^{-1}\, \det S = 1$ si ottiene, infine:

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{K} \text{ si ha: } p_A(x) = \det(B - x\, I) = p_B(x)$$

(2) Un vettore $v \in \mathbb{K}^n$ appartiene a $\text{Ker}\,(A - \lambda\, I)$ se e solo se $(A - \lambda\, I)v = 0$, ovvero se e solo se $S^{-1}(B - \lambda\, I)Sv = 0$. Quest'ultima uguaglianza significa che $Sv \in \text{Ker}\,(B - \lambda\, I)$. Dunque: $v \in \text{Ker}\,(A - \lambda\, I)$ se e solo se $Sv \in \text{Ker}\,(B - \lambda\, I)$.

Siano adesso $v_1, \dots, v_k$ elementi linearmente indipendenti di $\text{Ker}\,(A - \lambda\, I)$. Gli elementi $Sv_1, \dots, Sv_k$ appartengono a $\text{Ker}\,(B - \lambda\, I)$ e, poiché S è invertibile, sono linearmente indipendenti. Analogamente, siano $w_1, \dots, w_k$ elementi linearmente indipendenti di $\text{Ker}\,(B - \lambda\, I)$. Gli elementi $S^{-1}w_1, \dots, S^{-1}w_k$ appartengono a $\text{Ker}\,(A - \lambda\, I)$ e, poiché S^{-1} è invertibile, sono linearmente indipendenti. Dunque $\text{Ker}\,(A - \lambda\, I)$ e $\text{Ker}\,(B - \lambda\, I)$ hanno la medesima dimensione.

Dalle due osservazioni si deduce che *se A è diagonalizzabile si ha certamente $d_1 + \cdots + d_k = n$.*

1.25 Esempio
Applichiamo la procedura alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(1) Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = (x^2 + 1)(1 - x)$$

dunque l'unico autovalore di A è $1 \in \mathbb{R}$.

(2) Poiché $\mathrm{rk}\,(A - I) = 2$, dalla formula della dimensione applicata ad $A - I$ si ottiene:

$$d_1 = \dim V(1) = 1$$

(3) Poiché $d_1 \neq 3$, la matrice A risulta *non diagonalizzabile.*

Si osservi che se una matrice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile, per l'Osservazione 1.24 il polinomio caratteristico di A coincide con quello della forma diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dunque il polinomio caratteristico di A si può scrivere nella forma:

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$$

ovvero: *se A è diagonalizzabile, il polinomio caratteristico di A si fattorizza in prodotto di fattori di primo grado.*

Poiché il polinomio caratteristico della matrice A dell'esempio precedente *non è fattorizzabile in prodotto di fattori di primo grado*, la non diagonalizzabilità di A si può dedurre subito dall'esito del punto (1) della procedura.

1.26 Esempio

Applichiamo la procedura alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(1) Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = (1 - x)(x^2 - 1) = (1 - x)^2(-1 - x)$$

quindi gli autovalori di A sono: 1 e -1. Si osservi che il polinomio si fattorizza in prodotto di fattori di primo grado, dunque la matrice *può* essere diagonalizzabile.

(2) Poiché $\mathrm{rk}\,(A - I) = 1$ e $\mathrm{rk}\,(A + I) = 2$, dalla formula della dimensione applicata ad $A - I$ e ad $A + I$ si ottiene:

$$d_1 = \dim V(1) = 2 \quad , \quad d_2 = \dim V(-1) = 1$$

(3) Poiché $d_1 + d_2 = 3$, la matrice A risulta *diagonalizzabile.* Inoltre, la forma diagonale di A è:

$$\mathrm{diag}(1, 1, -1)$$

e, poiché:

$$V(1) = \mathrm{Ker}\,(A - I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

e

$$V(-1) = \mathrm{Ker}\,(A - I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

una matrice che realizza la similitudine è:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice S risulta *invertibile*: $\det S = 2$.

Dal risultato dell'esempio si deduce che anche la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

è diagonalizzabile. Infatti la matrice:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

e gli elementi: $1, 1, -1 \in \mathbb{C}$ verificano la definizione. In generale si ha: *Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è diagonalizzabile, lo è anche $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con la stessa forma diagonale e la stessa matrice che realizza la similitudine.*

1.27 Esempio

Applichiamo la procedura alla matrice (vedere l'Esempio 1.21):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

(1) Gli autovalori di A sono: i e $-i$.
(2) $d_1 = \dim V(i) = 1$ e $d_2 = \dim V(-i) = 1$.
(3) Poiché $d_1 + d_2 = 2$, la matrice A risulta *diagonalizzabile*. La forma diagonale di A è:

$$\operatorname{diag}(i, -i)$$

e, poiché:

$$V(i) = \operatorname{Ker}(A - i\,I) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

e:

$$V(-i) = \operatorname{Ker}(A + i\,I) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \rangle$$

una matrice che realizza la similitudine è:

$$S = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

La matrice S risulta *invertibile*: $\det S = -2$.

Si osservi che, come determinato nell'Esempio 1.17, la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

non ha autovalori, e quindi *non è diagonalizzabile*. Dunque: esistono matrici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizzabili che, pur avendo elementi reali,† non sono diagonalizzabili come matrici in $\mathbb{R}^{n\times n}$. In generale si ha: *Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ad elementi reali e diagonalizzabile. Se tutti gli autovalori di A sono numeri reali — e quindi la forma diagonale di A ha elementi reali —, allora esiste una matrice $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ad elementi reali che diagonalizza A, ovvero: anche $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è diagonalizzabile.*

1.28 Problema

Siano A e $\operatorname{diag}(2, -3, 3)$ matrici simili di $\mathbb{R}^{3\times 3}$, e $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matrice che realizza la similitudine.

†Ovvero, gli elementi a_{ij} di A sono numeri reali.

- Constatare che A è simile anche a $\mathrm{diag}(3, -3, 2)$ — ottenuta da $\mathrm{diag}(2, -3, 3)$ *permutandone* gli elementi lungo la diagonale — e che la matrice (s_3, s_2, s_1) realizza la similiudine.
- Determinare una matrice che realizza la similitudine tra A e $\mathrm{diag}(3, 2, -3)$.
- Dimostrare che A *non è* simile alla matrice $\mathrm{diag}(4, 2, 3)$.

  (Suggerimento: confrontare il polinomio caratteristico di A con quello di $\mathrm{diag}(4, 2, 3)$.)

Questo problema spiega il significato della frase: *la forma diagonale di una matrice è unica a meno di permutazioni.*

1.29 Problema

Siano A e $\mathrm{diag}(2, -3, 3)$ matrici simili di $\mathbb{R}^{3\times 3}$, e $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matrice che realizza la similitudine.

Constatare che per ogni α_1, α_2 e α_3 numeri reali non nulli, anche la matrice $(\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2, \alpha_3 s_3)$ realizza la similitudine.

Questo problema mostra che: se A è diagonalizzabile esistono *infinite* matrici che realizzano la similitudine tra A e la sua forma diagonale.

1.30 Problema

(1) Applicare la procedura alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Si osservi che il polinomio caratteristico di A si fattorizza in prodotto di fattori di primo grado, ma la matrice risulta ugualmente non diagonalizzabile.

(2) Decidere le la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

sia diagonalizzabile.

(3) Applicare la procedura alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(Soluzione: la forma diagonale di A è $\mathrm{diag}(0, -1, 1)$.)

1.31 Problema

Applicare la procedura a ciascuna delle matrici del Problema 1.15 e constatare che nessuna di esse è diagonalizzabile.

1.5 Esercizi

(1) Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Decidere se A è diagonalizzabile e, eventualmente, determinare la forma diagonale di A ed una matrice che realizza la similitudine.

Soluzione.

Si utilizza la procedura per la diagonalizzazione. Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = (2-x)^2 - 1 = (1-x)(3-x)$$

dunque gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

Le dimensioni degli autospazi sono:

$$d_1 = \dim V(\lambda_1) = \dim \operatorname{Ker}(A - I) = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

e:

$$d_2 = \dim V(\lambda_2) = \dim \operatorname{Ker}(A - 3I) = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

dunque: $d_1 + d_2 = 2$ e la matrice risulta *diagonalizzabile.*

La forma diagonale di A è:

$$\operatorname{diag}(1,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

inoltre:

$$V(\lambda_1) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$$

e:

$$V(\lambda_2) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

perciò una matrice che realizza la similitudine è:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(<u>Problema</u>: A è simile a $\operatorname{diag}(3,1)$?)

(2) Sia A la matrice dell'Esercizio (1), e si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$u'' = -Au$$

Determinare tutte le soluzioni del sistema.

Soluzione.

Si utilizza il cambio di variabile definito dalla matrice S dell'Esercizio (1):

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v \qquad (***)$$

ed il sistema di equazioni nelle nuove variabili v_1, v_2 risulta:

$$v'' = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} v \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} v_1'' = -v_1 \\ v_2'' = -3v_2 \end{cases}$$

Procedendo come nel primo punto dell'Esempio 1.1, tutte le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} v_1 = a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t \\ v_2 = a_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}\, t \end{cases}$$

Infine, utilizzando le relazioni (∗∗∗), tutte le soluzioni richieste sono:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 + v_2 = a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t + a_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}\, t \\ u_2 = -v_1 + v_2 = -a_1 \cos t - b_1 \operatorname{sen} t + a_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}\, t \end{cases}$$

(3) Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

- *Se* $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ è simile a $\operatorname{diag}(1, i)$ e $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ è simile a $\operatorname{diag}(i, 1)$ *allora* A è simile a B.
- *Se* $v \in \mathbb{R}^2$ è autovettore di $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ associato a 3, *allora* $-v$ è autovettore di A associato a -3.
- *Se* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile e $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è simile ad A, *allora* B è diagonalizzabile.
- *Se* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e $p_A(x) = (3 - x)(x^2 + 2)$ *allora* A non è diagonalizzabile.
- Le matrici $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $3I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sono simili.

(4) Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Decidere se A è diagonalizzabile e, eventualmente, determinare la forma diagonale di A ed una matrice che realizza la similitudine.

Soluzione.

Utilizzando la procedura per la diagonalizzazione si deduce che la matrice è diagonalizzabile, la forma diagonale di A è:

$$\operatorname{diag}(1, -1)$$

e una matrice che realizza la similitudine è:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

(Problema: La matrice A è ad elementi reali. È diagonalizzabile come elemento di $\mathbb{R}^{2\times 2}$?)

(5) Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Decidere se A è diagonalizzabile e, eventualmente, determinare la forma diagonale di A ed una matrice che realizza la similitudine.

Soluzione.

Utilizzando la procedura per la diagonalizzazione si deduce che la matrice *non è diagonalizzabile*.

(6) Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Decidere se A è diagonalizzabile e, eventualmente, determinare la forma diagonale di A ed una matrice che realizza la similitudine.

Soluzione.

Utilizzando la procedura per la diagonalizzazione si deduce che la matrice è diagonalizzabile, la forma diagonale di A è:

$$\mathrm{diag}(i, -i)$$

e una matrice che realizza la similitudine è:

$$S = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 2-i & 2+i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$