Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(1) 1ª colonna e 1ª riga "già diagonali"; passiamo alle colonne seguenti.

$$a_{22} = 0\ ; \quad H_1 = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}\ , \quad H_1 A = \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}}\ , \quad H_1 A H_1^T = \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}} = A_1$$

(2) $$a_{22}^{(1)} \neq 0\ ; \quad H_2 = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix}}\ , \quad H_2 A_1 = \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}}\ , \quad H_2 A_1 H_2^T = \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}}$$

Conclusione:

(I) A è congruente a $\mathrm{diag}(0,2,-2)$

- la fq associata a $\mathrm{diag}(0,2,-2)$ è indef
- $\mathrm{diag}(0,2,-2) = H_2 H_1 A H_1^T H_2^T$, la matrice che realizza la congruenza è $C = H_1^T H_2^T = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}$

(II) $G(\xi) = 2\xi_2^2 - 2\xi_3^2$; $G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$, $G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2$, $G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -2$

$x = C\xi \Rightarrow F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$, $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2$, $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -2$.

Oss:

- gli autovalori NON sono invarianti per congruenza
- Se $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\mathrm{diag}(\lambda_1', \dots, \lambda_n')$ sono congruenti,
  posto: $N = \#$ elem negativi, $Z = \#$ " nulli, $P = \#$ " positivi nella lista $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
  e $N', Z', P' = \dots \lambda_1', \dots, \lambda_n'$ si ha: $N = N'$, $Z = Z'$, $P = P'$.

- Tutte le matrici diagonali e congruenti ad A assegnata hanno lo stesso valore di N, Z, P.

- Tra le matr diag e congruenti ad A c'è $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ in cui $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A. Dunque:

$$\begin{cases} N = \#\ \text{autovalori negativi di } A \\ Z = \text{"}\quad\text{" nulli di } A \\ P = \text{"}\quad\text{" positivi di } A \end{cases}$$

def: (N, Z, P) si chiama inerzia di A

- L'inerzia è un invariante per congruenza (LEGGE D'INERZIA di SYLVESTER).

Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; autovalori: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

$\Rightarrow$ inerzia di $A = (1,1,1)$; A congruente a $\mathrm{diag}(0,2,-2)$,

$\Rightarrow$ inerzia di A = inerzia di $\mathrm{diag}(0,2,-2) = \dots$

Es (16 giu 2009 / Pb.1): $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, det FCJ(A) e matr che realizza la sim...

[**Oss**: A è diagonalizzabile, $\exists$ matr ad elem reali che realizza la sim...]

Es: Sia $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ diagonalizzabile t.c. $p_A(x) = (i-x)(2-x)^4$;

- indicare FCJ(A)
- determinare $\dim \mathrm{Ker}(A - iI)$, $\dim \mathrm{Ker}(A-2I)$, $\dim \mathrm{Ker}(A-2I)^2$.