Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

① $a_{11} = 0$; $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ (di A) ,

$A_1 = H_1 A H_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (simm e congruente ad A)

$\longleftarrow (c_1 + c_3, c_2, c_3)$ [di $H_1 A$]

② adesso: $a_{11}^{(1)} \neq 0$ e possiamo procedere col primo passo della "riduzione a scala".

$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $H_2 A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = H_2 A_1 H_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} r_1 \\ 2r_2 - r_1 \\ 2r_3 - r_1 \end{bmatrix}$ (di A_1)   (simm e congr ad A_1)

③ $a_{22}^{(2)} \neq 0$: possiamo procedere col secondo passo della "riduzione a scala".

$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $H_3 A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = H_3 A_2 H_3^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(diag e congr ad A_2)

Conclusione:

(I) A è congruente a diag$(2,-2,0)$;

- la fq associata ad A si class come quella associata alla matr diag$(2,-2,0)$ $[G(\xi) = 2\xi_1^2 - 2\xi_2^2]$: <u>indefinita</u>
- diag$(2,-2,0) = H_3 H_2 H_1 \, A \, (H_3 H_2 H_1)^T$, dunque la matr che realizza la congruenza è

$$C = (H_3 H_2 H_1)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(II)
- $G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2$, $G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -2$, $G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$

$x = C\xi \Rightarrow F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2$, $F\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -2$, $F\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$

> <u>Pb</u> (per casa): esplicitare $F(x)$ e verificare le uguaglianze.

<u>Oss</u>: $p_A(x) = 2x - x^3 = x(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$

- gli autovalori di A sono: $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
- gli autovalori di diag$(2,-2,0)$ sono: $0, 2, -2$

> A e diag$(2,-2,0)$ sono congruenti ma non sono simili!

<u>Es</u> (per casa): $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- indicare $F(x)$
- constatare che F è <u>indef</u> determinando $x, y \in \mathbb{R}^3$ non nulli t.c. $F(x) > 0$, $F(y) < 0$.