<u>Oss</u>: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simm, F fq associata ad A.

① Se A diagonale è facile classif F (in base al segno degli elem sulla diagonale di A)

② Se B è <u>congruente</u> ad A ($\exists C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert...) e G è la fq associata a B: <u>F e G hanno la stessa classificazione</u>.

> <u>Pb</u>: Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simm, decidere se esiste, ed event determ, B <u>diagonale</u> e congruente ad A.

Si ricordi che:

> <u>TEO</u> (diagonalizzazione matr simmetriche):
> $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simm: è diagonalizzabile ed esiste una matrice ortogonale che realizza la similitudine.

<u>OVVERO</u>: $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale t.c.

$$A = Q\ \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\ Q^{-1}$$

<u>MA</u> Q ortogonale $\Rightarrow Q^{-1} = Q^T$ e q.di:

$$\boxed{A = Q\ \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\ Q^T}$$

cioè: <u>A è congruente a $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$</u>.

> <u>Oss</u>: $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ sono gli autovalori di A.

$\Rightarrow$

> <u>TEO</u> (classificazione mediante gli autovalori)
> La fq F si class, in base al segno degli autovalori $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ di A, come la fq associata a $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $p_A(x) = (1-x)\ (x^2-1) = (1+x)(1-x)^2$

- autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$
- la fq associata ad A si class come quella associata a $\mathrm{diag}(1,1,-1)$: è <u>indefinita</u>.
- $G(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 \Rightarrow G\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = 1$, $G\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = -1$;
- $A = Q\ \mathrm{diag}(1,1,-1)\ Q^T$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow$ la matr che realizza la congruenza è: Q^T

  q.di $F(x) = G(\xi)$ per $\xi = Q^T x$ ovvero $x = Q\xi$
- $F(q_1) = 1$, $F(q_3) = -1$. [<u>Pb</u>: verificare...]

<u>Oss</u>: la procedura di class mediante autovalori <u>non è elementare</u> (<u>def</u>: procedura elementare significa che richiede un numero finito di op aritmetiche per essere portata a termine): calcolare gli autovalori equivale a det le radici del polinomio caratt.

> <u>Pb</u>: Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simm, decidere se esistono matrici diag e congruenti <u>ma non simili</u> ad A, ed event determinarne una <u>con una proc elem</u>.

- Descriz di una <u>proc elem</u> che, data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simm, determina una matr diag e congruente ad A, ed una matr che realizza la congruenza... (tramite esempi)

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simm, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di elem h_{ij}

- riga k-esima di HA =

$$= h_{k1}\,(\text{riga 1 di } A) + \dots + h_{kn}\,(\text{riga } n \text{ di } A)$$

- colonna k-esima di AH^T =

$$= h_{k1}\,(\text{colonna 1 di } A) + \dots + h_{kn}\,(\text{colonna } n \text{ di } A)$$

- se H è invertibile, HAH^T è congruente ad A (la matr che realizza la cong è H^T).

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\boxed{\text{Passo 1}}$: $a_{11} \neq 0$; $H_1 = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}$

$$\Rightarrow H_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_1 A H_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A_2$$

H_1 è scelta in modo da ottenere questi due zeri...

... e quindi, in $H_1 A H_1^T$, la prima riga e colonna "diagonali".

Oss:
- si può det H_1 perché $a_{11} \neq 0$.
- H_1 è invert (triangolare con ...) $\Rightarrow$ A_2 congruente ad A.

$\boxed{\text{Passo 2}}$: $a_{22}^{(2)} = 0$; $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow H_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 A_2 H_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A_3$$

H_2 è scelto in modo da ottenere questo "non zero"...

... e quindi, in $H_2 A H_2^T$, questo.

Oss: H_2 è invert $\Rightarrow$ A_3 congruente ad A_2.

$\boxed{\text{Passo 3}}$: $a_{22}^{(2)} \neq 0$; $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow H_3 A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad H_3 A_3 H_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = A_4$$

H_3 è scelto in modo da ottenere questo zero...

... e quindi, in $H_3 A_3 H_3^T$, la seconda riga e colonna "diagonali".

Oss:
- si può det H_3 perché $a_{22}^{(2)} \neq 0$
- H_3 è invert $\Rightarrow$ A_4 è congruente ad A_3
- A_4 è diagonale.

Infine:

- A_4 è congruente ad A (propr transitiva della rel di congruenza):

$$A_4 = H_3 A_3 H_3^T = H_3 (H_2 A_2 H_2^T) H_3^T$$
$$= H_3 H_2 (H_1 A H_1^T) H_2^T H_3^T$$
$$= (H_3 H_2 H_1)\, A\, (H_1^T H_2^T H_3^T)$$

- la matr che realizza la congr è $C = H_1^T H_2^T H_3^T = \dots$

- la fq associata ad A (e quindi A) si classif come quella associata a $\operatorname{diag}(1, 2, -2)$: indefinita (Pb: det $x, y \neq 0$ t.c. $F(x) > 0$, $F(y) < 0$).