Oss: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe C^3 (derivabile almeno tre volte)

Pb: classif i pti stazionari di f (min, max, ...)

Sol: Pti stazionari: $\alpha\in\mathbb{R}$ t.c. $f'(\alpha)=0$

SE $f''(\alpha)>0$ ALLORA α pto di minimo rel

SE $f''(\alpha)<0$ ALLORA " " massimo rel

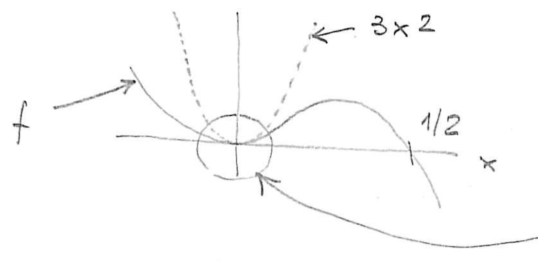
SE $f''(\alpha)=0$ ALLORA ... ?

Infatti: $f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+\dots$
(formula di Taylor)

Per $x\approx\alpha$, se $f''(\alpha)\neq 0$: $\boxed{f(x)\approx\frac{1}{2}f''(\alpha)(x-\alpha)^2}$ e

1) approx tanto migliore quanto più $|x-\alpha|$ piccolo
2) $\exists\,\delta>0$ t.c. $0<|x-\alpha|<\delta \Rightarrow f(x)$ ha il segno di $f''(\alpha)$
3) $f''(\alpha)>0\Rightarrow\dots$ $f''(\alpha)<0\Rightarrow\dots$

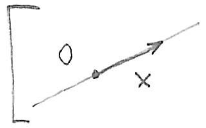
Es: $f(x)=3x^2-6x^3$; 0 è pto staz, $f''(0)=6>0$
$\Rightarrow$ minimo rel



$f(x)\approx 3x^2$

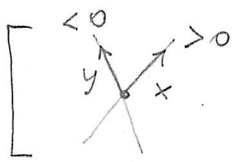
Oss: A $\in\mathbb{R}^{n\times n}$, simmetrica, F fq associata ad A

- $0\in\mathbb{R}^n$ è punto stazionario di F (verifica la def ...)
- F def pos $\Rightarrow$ 0 pto di minimo per F
- F def neg $\Rightarrow$ 0 pto di massimo per F
- F semidef $\Rightarrow$ 0 punto di massimo (semidef negativa) o di minimo (semidef positiva) non isolato



$x\neq 0$ t.c. $F(x)=0 \Rightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\ F(\lambda x)=0$

- F indefinita $\Rightarrow$ 0 non è punto di estremo per F



$x,y\neq 0$ t.c. $F(x)>0$, $F(y)<0$ $\Rightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R}$, $F(\lambda x)>0$, $F(\lambda y)<0$

- Per $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ esiste teoria analoga a quella del caso $n=1$; la classif di un punto stazionario dipende dalla forma quadratica associata ad un'opportuna matrice simmetrica (matrice hessiana di f) che nel caso di f forma quadratica è la matrice che la definisce.

Es: $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, $F(x)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2$

- $F\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\lambda_1$, $F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\lambda_2$
- F def pos $\Rightarrow\lambda_1>0,\ \lambda_2>0$
- $\lambda_1>0$ e $\lambda_2>0\Rightarrow\forall x\neq 0$, $F(x)>0$, ovvero F def pos.
- F def neg $\Rightarrow\lambda_1<0,\ \lambda_2<0$
- $\lambda_1<0$ e $\lambda_2<0\Rightarrow\forall x\neq 0$, $F(x)<0$, ovvero F def neg.

Dunque: $\boxed{\begin{array}{l}F \text{ def pos} \Leftrightarrow \lambda_1>0,\dots,\lambda_n>0\\ F\text{ def neg}\Leftrightarrow\lambda_1<0,\dots,\lambda_n<0\end{array}}$

Per casa: cns per semidef, indef

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simm, F f.q associata ad A, C $\in \mathbb{R}^{n\times n}$, invertibile

- $x = C\xi$ (ξ coord di x risp colonne di C)
- $F(x) = Ax \cdot x = x^T A x = \xi^T C^T A C \xi = (C^T A C)\xi \cdot \xi$
- $B = C^T A C$, G fq associata a B

$$\boxed{x, \xi \text{ t.c. } x = C\xi \Rightarrow F(x) = G(\xi)}$$

ovvero: <u>F e G hanno la stessa classificazione</u>

def $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetriche: CONGRUENTI se esiste $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>invertibile</u> t.c. $B = C^T A C$

dunque: <u>se A, B congruenti</u>, le fq associata ad A e quella associata a B <u>hanno la stessa classificazione</u>.