**Es**: $\begin{cases} x_1'' = -x_1 + x_2 \\ x_2'' = -x_2 \end{cases}$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\quad x'' = \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J_2(-1)$

$\hookrightarrow \boxed{x'' = A x}$

- $A$ non diagonalizzabile ($\lambda_1 = -1$, $d_1 = \dim V(-1) = 1 \neq 2$)

$\Rightarrow \nexists$ coord rispetto alle quali il sist di eq diventa "disaccoppiato",

MA $A$ è in f. di Jordan...

SOLUZIONI:

1) dalla II eq: la componente $x_2$ è della forma $\boxed{x_2(t) = a_2 \cos t + b_2 \operatorname{sen} t}$

2) Assegnati $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli:

I eq: $\quad x_1'' = -x_1 + \boxed{a_2 \cos t + b_2 \operatorname{sen} t} \rightarrow \neq 0$: EQ NON OMOGENEA

se $x_1^p(t)$ soluzione allora tutte le soluzioni sono

$$\boxed{x_1(t) = x_1^p(t) + a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t}, \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

- come det $x_1^p(t)$: si cerca della forma: $(\alpha_1 \cos t + \beta_1 \operatorname{sen} t)\, t$

[→ corso di Analisi ...]

$$(\alpha_1 \cos t + \beta_1 \operatorname{sen} t)\, t \text{ soluzione} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -b_2/2 \\ \beta_1 = a_2/2 \end{cases}$$

Q.di, tutte le soluz sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = \left(-\frac{b_2}{2} \cos t + \frac{a_2}{2} \operatorname{sen} t\right) t + a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t \\ x_2(t) = a_2 \cos t + b_2 \operatorname{sen} t \end{cases} ; \quad a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$$

In generale: esistono sempre coord rispetto alle quali il sist ha matrice in f. di Jordan. Le soluz di quest'ultimo si determinano risolvendo singole equazioni, alcune omogenee, altre no, con metodi elementari.

**Es**: $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $\quad FCJ(A) = \operatorname{diag}(J_1(\lambda), J_2(\lambda))$, $C$ che realizza...

- $A = C \, FCJ(A) \, C^{-1}$
- $A^2 = C \, FCJ(A) \underbrace{C^{-1} C}_{I} FCJ(A) \, C^{-1} = C \, FCJ(A)^2 \, C^{-1}$
- $A^3 = C \, FCJ(A)^3 \, C^{-1}$ ...

Per det le potenze di $A$, basta conoscere quelle di $FCJ(A)$

- $FCJ(A)^2 = \operatorname{diag}(\underbrace{J_1(\lambda)^2}_{\lambda^2}, J_2(\lambda)^2)$

$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N_1$, $\quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad N_1^2 = 0$

$J_2(\lambda)^2 = (\lambda I + N_1)(\lambda I + N_1) = \lambda^2 I + 2\lambda N_1 + \cancel{N_1^2}$

$= \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

- $FCJ(A)^3 = \operatorname{diag}(\underbrace{J_1(\lambda)^3}_{\lambda^3}, J_2(\lambda)^3)$

$J_2(\lambda)^3 = (\lambda^2 I + 2\lambda N_1)(\lambda I + N_1) = \lambda^3 I + 3\lambda^2 N_1 + \cancel{2\lambda N_1^2}$

$= \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$

In generale, per $k \geq 1$ si ha:

$$J_2(\lambda)^k = (\lambda I + N_1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N_1^j \qquad \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

$$= \binom{k}{0} \lambda^k I + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} N_1$$

$$= \lambda^k I + k \lambda^{k-1} N_1 = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

Analogam., se $FCJ(A)$ contiene un blocco di dim tre:

$$J_3(\lambda)^k = (\lambda I + N_2)^k \qquad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2^3 = 0$$

$$= \binom{k}{0} \lambda^k I + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} N_2 + \binom{k}{2} \lambda^{k-2} N_2^2$$

$$= \lambda^k I + k \lambda^{k-1} N_2 + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} N_2^2$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

def (forma quadratica)

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica
- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = Ax \cdot x$ forma quadratica associata ad A

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$Ax = \dots$, $F(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$

In generale: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow F(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$

(simmetrica: $a_{ij} = a_{ji}$)

SE $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ si ha

$F(x) \begin{cases} > 0 \\ \geq 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{cases}$ la f q si dice $\begin{cases} \text{def pos} \\ \text{semidef pos} \\ \text{semidef neg} \\ \text{def neg} \end{cases}$,

ALTRIMENTI: ($\exists x, y$ non nulli t.c. $F(x) > 0$, $F(y) < 0$) indefinita