Es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$; det $FCJ(A)$ e matr che realizza...

- $p_A(x) = (3-x)^4 \Rightarrow \exists$ blocchi associati a 3, $\Sigma \dim = 4$
- $\dim V(3) = \dim \ker(A-3I) = 2 \Rightarrow$ # blocchi associati a 3 : 2
- $\dim \ker(A-3I)^2 = 4 \Rightarrow$ # blocchi associati a 3 di dim ≥ 2 : 2

q.di :
$$\boxed{FCJ(A) = \operatorname{diag}(J_2(3), J_2(3)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}}$$

- cerchiamo $C = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ invert t.c. $AC = C\, FCJ(A)$

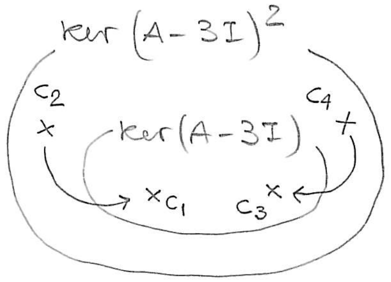
ovvero t.c.

$$\begin{cases} Ac_1 = 3c_1 \\ Ac_2 = c_1 + 3c_2 \\ Ac_3 = 3c_3 \\ Ac_4 = c_3 + 3c_4 \end{cases} \qquad \begin{aligned} (A-3I)c_1 &= 0 \\ (A-3I)c_2 &= c_1 \\ (A-3I)c_3 &= 0 \\ (A-3I)c_4 &= c_3 \end{aligned}$$

c_1, c_3 < lin indip, $\in \ker(A-3I)$

c_2, c_4 < lin indip, $\notin \ker(A-3I)$, $\in \ker(A-3I)^2$

- sappiamo già che : $\dim \ker(A-3I) = 2$ e $\dim \ker(A-3I)^2 = 4$



- $\ker(A-3I) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$
- $\ker(A-3I)^2 = \left\langle \left[\ \text{''}\ \right], \left[\ \text{''}\ \right], \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

- $c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$c_1 = (A-3I)c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $c_3 = (A-3I)c_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

dunque :
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(e $\det C \neq 0$).

Oss : con la scelta fatta di c_2, c_4 (gli elem delle base di $\ker(A-3I)^2$ ...) i vettori $c_1 = (A-3I)c_2$ e $c_3 = (A-3I)c_4$ <u>SONO</u> elem lin indip di $\ker(A-3I)$.

Se : $c_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $c_4' = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (elem lin indip di $\ker(A-3I)^2$ non appart a $\ker(A-3I)$)

si ottiene : $c_1' = (A-3I)c_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $c_3' = (A-3I)c_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

che sono elem di $\ker(A-3I)$ <u>NON</u> lin indip.

Oss (FCJ e matrici ad elem reali) :

- $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ad elem reali (ovvero $a_{ij} \in \mathbb{R}$)
- $FCJ(A)$, $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ che realizza ...

<u>SE</u> $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A t.c. $\lambda \notin \mathbb{R}$

<u>ALLORA</u>
- $FCJ(A)$ non è ad elem reali
- $\nexists\, C$ ad elem reali che realizza ... (altrimenti ...)

Come negli esempi, si ha:

> <u>SE</u> tutti gli autovalori di A sono reali
>
> <u>ALLORA</u>
> - $FCJ(A)$ è ad elem reali
> - $\exists\, C$ ad elem reali che realizza ...