<u>Es</u>: $A = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & \\ \hline & & & & & 1 \end{array}\right] = \mathrm{diag}\big(J_3(2), J_2(2), J_1(1)\big) \in \mathbb{C}^{6\times 6}$

- $p_A(x) = (2-x)^5(1-x)$ $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 2\text{, molt alg } 5 \\ \lambda_2 = 1\text{, molt alg } 1\end{array}\right\}$ inv per sim

> λ autoval di m.a. m
> $\Leftrightarrow$ m = somma dim dei blocchi associati a λ

- $\dim\mathrm{Ker}(A-2I) = \dim\mathrm{Ker}\left[\mathrm{diag}\big(J_3(0), J_2(0), J_1(-1)\big)\right] = 2$

  $\dim\mathrm{Ker}(A-I) = \dim\mathrm{Ker}\left[\mathrm{diag}\big(J_3(1), J_2(1), J_1(0)\big)\right] = 1$

> λ autovalore e $\dim V(\lambda) = d$ invarianti per simili T.
> $\Leftrightarrow$ d = numero blocchi associati a λ

- $\dim\mathrm{Ker}(A-2I)^2 = \dim\mathrm{Ker}\left[\mathrm{diag}\big(J_3(0)^2, J_2(0)^2, J_1(-1)^2\big)\right] = 4$

> λ autovalore e $\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)^2 = \nu$
> $\Leftrightarrow$ ν = (# blocchi associati a λ di dim ≥ 1) +
> + (# blocchi associati a λ di dim ≥ 2)

<u>Oss</u>: 1) $\forall k$ intero positivo, <u>$\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)^k$ è</u> <u>invariante per similitudine</u>:

A simile a $B \Rightarrow$ • $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $A-\lambda I$ simile a $B-\lambda I$
• $\forall k$ intero pos, A^k simile a B^k

$\Rightarrow \forall k$ intero pos, $\lambda \in \mathbb{C}$: $(A-\lambda I)^k$ simile a $(B-\lambda I)^k$

$\Rightarrow \dim\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^k = \dim\mathrm{Ker}(B-\lambda I)^k$

2) • $A - 2I = \mathrm{diag}\big(J_3(0), J_2(0), J_1(-1)\big)$

$\mathrm{rk}(A-2I) = 2 + 1 + 1 = 4$

$\Rightarrow \dim\mathrm{Ker}(A-2I) = 2$

• $(A-2I)^2 = \mathrm{diag}\big(J_3(0)^2, J_2(0)^2, J_1(-1)^2\big)$

$\mathrm{rk}(A-2I)^2 = 1 + 0 + 1 = 2$

$\Rightarrow \dim\mathrm{Ker}(A-2I)^2 = 4$

• $(A-2I)^3 = \mathrm{diag}\big(J_3(0)^3, J_2(0)^3, J_1(-1)^3\big)$

$\mathrm{rk}(A-2I)^3 = 0 + 0 + 1 = 1$

$\Rightarrow \dim\mathrm{Ker}(A-2I)^3 = 5$

> λ autovalore e $\dim(A-\lambda I)^k = \nu_k$
> $\Leftrightarrow$ ν_k = (# blocchi associati a λ di dim ≥ 1) + ...
> ... + (# blocchi associati a λ di dim $\geq k$)

<u>Es</u>: $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ in forma di Jordan t.c.

1) $p_A(x) = (2-x)^3(i-x)^4$
2) $\dim\mathrm{Ker}(A-2I) = 1$, $\dim\mathrm{Ker}(A-iI) = 2$
3) $\dim\mathrm{Ker}(A-2I)^2 = 2$, $\dim\mathrm{Ker}(A-2I)^3 = 3$
4) $\dim\mathrm{Ker}(A-iI)^2 = 4$

<u>Allora</u>: 1) $\Rightarrow$ • $\exists$ blocchi associati a 2 e a i;
• somma dim blocchi associati a 2 = 3
• somma dim blocchi associati a i = 4

2) $\Rightarrow$ • # blocchi associati a 2 = 1 ($\Rightarrow J_3(2)$)
• # blocchi associati a i = 2

3) $\Rightarrow$ • $2 = $ (# blocchi associati a 2) + (# blocchi associati a 2 di dim ≥ 2) [$\Rightarrow$ 1 blocco assoc a 2 di dim ≥ 2]

• $3 = $ " + " + (# blocchi associati a 2 di dim ≥ 3) [$\Rightarrow$ 1 blocco associato a 2 di dim ≥ 3]

4) $\Rightarrow$ $4 = $ (# blocchi associati a i) + (# blocchi associati a i di dim ≥ 2)

$\Rightarrow$ 2 blocchi associati ad i di dim ≥ 2

$\Rightarrow$ $J_2(i)$, $J_2(i)$

dunque: Blocchi in A: $\boxed{J_3(2),\ J_2(i),\ J_2(i)}$

Oss: Info suff per determ i blocchi sulla diag di una matrice A in forma di Jordan:

- polinomio caratteristico di A
- $\forall \lambda$ autovalore di A e k intero ≥ 0: $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^k$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$; $\exists$ FCJ(A) $\oplus$ invarianza per similitudine

$\Rightarrow$ è possibile determ FCJ(A) direttam da A