def (matrice diag a blocchi)

- $n_1, \dots, n_k$ interi > 0, $\quad n_1 + \dots + n_k = n$
- $A_1 \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_1}, \dots, A_k \in \mathbb{K}^{n_k \times n_k}$

$$\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_k \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

"matrice diagonale a blocchi di blocchi sulla diagonale $A_1, \dots, A_k$"

Es: • $n_1 = 1, n_2 = 2 \Rightarrow n = 3$

- $A_1 = 1 \in \mathbb{C}^{1\times 1}$, $\quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$
- $\operatorname{diag}(A_1, A_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 2 & 1-i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$
- $\operatorname{diag}(A_2, A_1) = \dots \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$

---

def (blocco di Jordan): $\lambda \in \mathbb{K}$;

$$J_1(\lambda) = 1 \in \mathbb{K}^{1\times 1}, \quad J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$$

$$J_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3 \times 3} \quad \dots$$

"blocco di Jordan di dim ... associato a λ"

def (matrice in f di Jordan):

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è in "forma di Jordan" se

$\exists\ \delta_1, \dots, \delta_k$ interi positivi e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che

$$\delta_1 + \dots + \delta_k = n \quad \text{e} \quad A = \operatorname{diag}\left(J_{\delta_1}(\lambda_1), \dots, J_{\delta_k}(\lambda_k)\right)$$

Es:

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ è in f. di Jordan (infatti...)
- diagonale $\Rightarrow$ in forma di Jordan
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ __non__ in f di Jordan

---

TEO (forma canonica di Jordan [in $\mathbb{C}$])

- $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\exists$ matrici in f. di Jordan simili ad A;
- due matrici in f. di Jordan simili ad A differiscono solo per l'ordine dei blocchi sulla diagonale;
- ciascuna delle matr in f. di Jordan simili ad A è detta __FORMA CANONICA DI JORDAN__ ed è indicata con la sigla $FCJ(A)$.

__dim__: no, mostreremo	• come determ le FCJ • come determ una matr che realizza la similitudine: $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibile t.c. $AS = S\,FCJ(A)$.

__Oss__: per det la FCJ occorre:

- k = #blocchi sulla diagonale

e, per ciascun blocco:

- la __dimensione__ δ_j;
- l'elemento $\lambda_j \in \mathbb{C}$ a cui è associato.

La FCJ è determinata dall'elenco dei blocchi $J_{\delta_1}(\lambda_1), \dots, J_{\delta_k}(\lambda_k)$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ • blocchi: $J_3(2)$, $J_2(2)$, $J_1(1)$

È possibile collegare i valori λ_j, δ_j a caratteristiche di A invarianti per similitudine.

(1) $p_A(x) = (2-x)^5 (1-x)$

• λ_j autovalore di molteplicità algebrica m_j
$\Rightarrow$ m_j = somma delle dimensioni dei blocchi associati a λ_j

def (molteplicità algebrica)
• $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di $p_A(x)$
• $p_A(x) = (\lambda - x)^m q(x)$
con $q(\lambda) \neq 0$, m intero > 0
m: molteplicità algebrica dell'autovalore λ

(2) $\dim \operatorname{Ker}(A-2I) = 2$, $\dim \operatorname{Ker}(A-I) = 1$

def (molt geom)
• $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore
• $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ è molteplicità geometrica di λ

• λ_j autovalore
$\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_j I)$ = # blocchi associati a λ_j

(3) $\dim \operatorname{Ker}(A-2I)^2 = 4$ → #

• λ_j autovalore
$\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_j I)^2$ = (# blocchi associati a λ_j di dim ≥ 1) + (# blocchi associati a λ_j di dim ≥ 2)

Si riscopre che:
(1) $\exists$ blocchi associati a $\lambda_1 = 2$ e blocchi associati a $\lambda_2 = 1$
(2) # blocchi associati a $\lambda_1 = 2$: due, # blocchi associati a $\lambda_2 = 1$: uno
dim: δ_{11}, δ_{12} dim: δ_{21}

(1) $\Rightarrow$ $\delta_{11} + \delta_{12} = 5$ (1+4, 2+3 ?)
$\boxed{\delta_{21} = 1}$

(3) $4 = 2 +$ (# blocchi associati a $\lambda_1 = 2$ di dim ≥ 2)
$\Rightarrow$ 2 blocchi associati a $\lambda_1 = 2$ di dim ≥ 2
$\Rightarrow$ $\delta_{11} = 2$, $\delta_{12} = 3$

#

• $A = \operatorname{diag}(J_3(2), J_2(2), J_1(1))$
• $A - 2I = \operatorname{diag}(J_3(0), J_2(0), J_1(-1))$
• $(A-2I)^2 = \operatorname{diag}(J_3(0)^2, J_2(0)^2, J_1(-1)^2)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1)

• $\dim \operatorname{Ker}(A-2I)^2 = 2 + 2 = 4$
dal 2° blocco
dal 1° blocco

Es: $\operatorname{diag}(J_2(0), J_5(0))$ dim Ker = 2

$\operatorname{diag}(J_2(0), J_5(0))^2$ dim ker = 2 + 2

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\operatorname{diag}(J_2(0), J_5(0))^3$ dim Ker = 2 + 2 + 1

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

etc fino a
dim ker $(\ )^5 = 2+2+1+1+1$