Pb. diagonalizzazione: data $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

- decidere se è diagonalizzabile
- event. determinare f. diagonale e matrice che realizza la similitudine.

Teo: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ base di $\mathbb{K}^n$ costituita da autovettori di A.

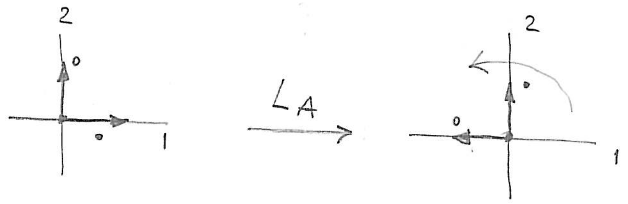
- Ricerca autovalori & autovettori:

1) $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di A $\Leftrightarrow$ λ è radice del polinomio caratteristico di A

2) $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore; gli autovettori di A associati a λ sono tutti e soli gli elementi non nulli di $V(\lambda)$

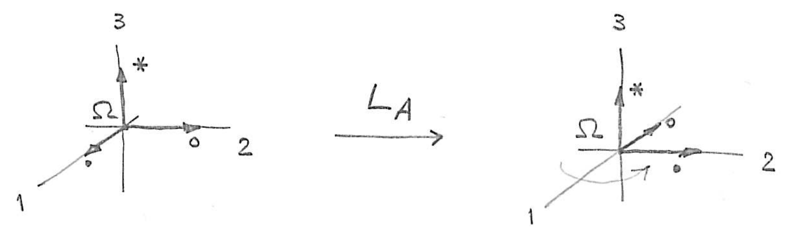
Es: • $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; L_A è rotazione del piano:

$\nexists$ autovettori (non diagon.)

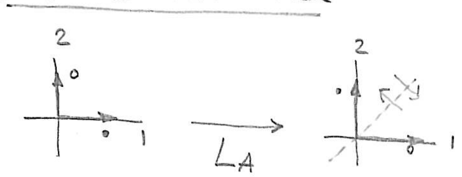


• $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$; L_A è rotazione dello spazio intorno all'asse Ωx_3:

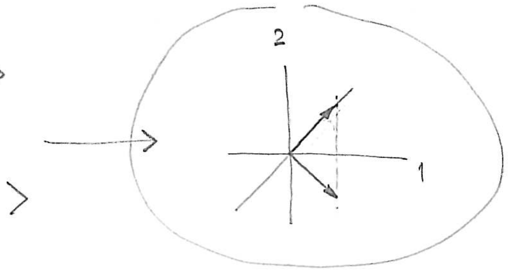
- autovalore: 1
- $V(1) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$



• $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; L_A è riflessione risp. alla bisettrice del 1°-3° quadrante



- $p_A(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \Rightarrow$ autovalori: $1, -1$
- $V(1) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
- $V(-1) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$



$\Rightarrow$ A è diagonalizz.: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ realizza la similitudine tra A e $\mathrm{diag}(1,-1)$.

- PROCEDURA per DIAGONALIZZAZIONE

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

1) determ l'elenco senza ripetizioni $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ degli autovalori

2) SE A non ha autovalori ALLORA non è diagonalizzabile;
ALTRIMENTI: per ciascun λ_j determinare dim autosp

$$d_1 = \dim V(\lambda_1), \dots, d_k = \dim V(\lambda_k)$$

3) SE $d_1 + \dots + d_k = n$ ALLORA

3.1) A è diagonalizzabile

3.2) f. diagonale: $\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{d_k})$

3.3) da $V(\lambda_j)$ estrarre base $b_1^{(j)}, \dots, b_{d_j}^{(j)}$; una matrice che realizza la similitudine è:

$$S = \left(b_1^{(1)}, \dots, b_{d_1}^{(1)}, \dots, b_1^{(k)}, \dots, b_{d_k}^{(k)} \right)$$

ALTRIMENTI: A non è diagonalizzabile.

Oss: ① Se $d_1+\dots+d_k=n$, la matr S def in (3.3) è t.c.: $AS = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_1 \dots \lambda_k \dots \lambda_k)$.

Perché realizzi la sim deve essere invertibile: (è vero, ma dim: no).

② Se $d_1+\dots+d_k \neq n$ la matrice non è diagonalizzabile.

Ovvero: diagonalizzabile $\Rightarrow d_1+\dots+d_k = n$. Infatti:

- Se A diagonalizzabile allora:

(I) $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{K}$, $m_1, \dots, m_k$ interi positivi t.c.

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \dots (\lambda_k - x)^{m_k}$$

$$[\Rightarrow m_1+\dots+m_k = n]$$

(II) $\forall j$ si ha: $d_j = \dim V(\lambda_j) = m_j$

$$\Rightarrow d_1+\dots+d_k = n$$

Es: $A = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$, $\alpha \neq \beta$ ...

- Se A, B simili, allora:

1) $p_A = p_B$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \dim \mathrm{Ker}(B - \lambda I)$

ovvero: il polinomio caratt e la dim di ciascun autospazio sono INVARIANTI PER SIMILITUDINE

(dim: ...)

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

1) $p_A(x) = (1-x)\left[(2-x)^2 + 1\right]$ $\boxed{>0\ \forall x \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ autovalori: $\lambda_1 = 1$

2) $d_1 = \dim V(1) = \dim \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$

3) $d_1 \neq 3 \Rightarrow A$ non diagonalizzabile.

Oss: Se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalizzabile, ovvero simile a $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x) \dots (\lambda_n - x)$$

cioè: se A è diagonalizzabile, il polinomio caratteristico di A si fattorizza in prodotto di fattori di primo grado.

[• Nell'Es precedente ...]

Es: A simile a $\mathrm{diag}(3,-1,-1) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$; $S = (s_1, s_2, s_3)$ realizza la similitudine.

- Se A simile a $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ allora $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ è una permutazione di $3, -1, -1$;
- A è simile a $\mathrm{diag}(-1, 3, -1)$, e $S' = (s_2, s_1, s_3)$ realizza la similitudine.
- $r_1 \in \langle s_1 \rangle$ non nullo, $r_2, r_3 \in \langle s_2, s_3 \rangle$ lin indip: $\Gamma = (r_1, r_2, r_3)$ realizza la similitudine (iniziale).

$\Rightarrow$ ① SE Λ_1, Λ_2 diagonali simili ad A ALLORA Λ_1 si ottiene da Λ_2 permutando gli elem sulla diagonale.

② SE A diagonalizzabile ALLORA $\exists$ infinite matr che realizzano...