CAMBIO AULA: Vedi in A22

<u>Oss</u>: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Allora:

$\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $A \Leftrightarrow \exists v < {\in \mathbb{K}^n \atop \neq 0}$ t.c. $Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow \exists v < {\in \mathbb{K}^n \atop \neq 0}$ t.c. $(A - \lambda I) v = 0 \Leftrightarrow \det (A - \lambda I) = 0$

<u>def</u>: <u>POLINOMIO CARATTERISTICO</u> di A
- a coeff in $\mathbb{K}$
- di grado n

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; $p_A(x) = (1-x)(2-x)^2$

- <u>def</u>: p polin. a coeff in $\mathbb{K}$; <u>RADICE</u> di p: un elem $\alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $p(\alpha) = 0$.

<u>TEO</u>: $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se e solo se λ radice di p_A.

<u>Es</u>:
- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $p_A(x) = x^2 + 1$

  $\nexists$ radici di $p_A \Rightarrow \nexists$ autovalori di A

- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$; $p_A(x) = x^2 + 1 = (i - x)(-i - x)$

  radici di p_A : $i, -i$

  $\Rightarrow$ autovalori di A : $i, -i$

- $A = \mathrm{diag}(3, 2, -6) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; $p_A(x) = (3-x)(2-x)(-6-x)$

  radici di p_A : $3, 2, -6 \Rightarrow$ autovalori di A...

- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$; $p_A(x) = (x^2+1)(1-x)$

  radici di p_A : $1 \Rightarrow$ autovalori di A : 1

- <u>Oss</u>: Se $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore, gli autovettori associati a λ sono <u>tutti</u> gli elementi non nulli di $\ker (A - \lambda I)$.

  <u>def</u> (autospazio): <u>AUTOSPAZIO</u> di A <u>associato a</u> λ.

<u>Es</u>: • $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$; autovalori : $i, -i$

$V(i) = \ker (A - iI) = \ker \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^2$

$V(-i) = \ker (A + iI) = \ker \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^2$

autovett associati a i = $\left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \alpha < {\in \mathbb{C} \atop \neq 0} \right\}$

autovett associati a $-i$ = $\left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \alpha < {\in \mathbb{C} \atop \neq 0} \right\}$

• $A = \mathrm{diag}(3, 2, -6) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$; autovalori : $3, 2, -6$

$V(3) = \ker(A - 3I) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

ecc

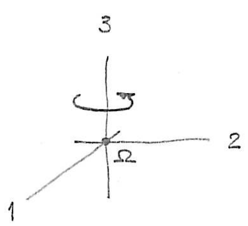
• $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$; autovalori : 1

$V(1) = \ker(A - I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

Oss : 1) $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ def da $L_A(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$

è rotaz antioraria di $\pi/2$.

2) $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ def da $L_A(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$



è rotaz intorno all'asse Ωx_3 .

In entrambi i casi, i ris ottenuti per autovalori e autovettori sono geometricam evidenti.

Oss : le prime due matrici dell'Es precedente sono diagonalizzabili, le terza no.

↳ infatti, scegliendo un elem non nullo da ciascuno degli autospazi si ottiene una base costituita da autovettori !

Es : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

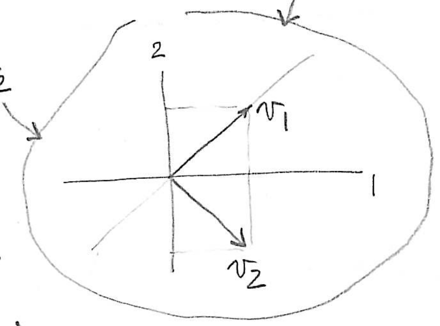
L_A è riflessione risp alla bisettrice del I - III quadr.

• $p_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$\Rightarrow$ autovalori : $1, -1$

• $V(1) = \ker(A - I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2$ v_1

$V(-1) = \ker(A + I) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2$ v_2



• A è diagonalizzabile :

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ realizza la similitudine tra A e $\mathrm{diag}(1, -1)$