<u>def</u> (matrici simili): $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ <u>simili</u>

se $\exists\, S \begin{cases} \in \mathbb{K}^{n\times n} \\ \text{invertibile} \end{cases}$ t.c. $A = S^{-1}BS$

[S "realizza la similitudine" tra A e B]

<u>Oss</u>: Sia $s_1, \dots, s_n$ base di $\mathbb{K}^n$:

- $S = (s_1 \dots s_n)$ è <u>invertibile</u>
- $x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$; $x = Sx' = x'_1 s_1 + \dots + x'_n s_n$
  è l'elem di $\mathbb{K}^n$ di coord … risp alla base …
- $x \in \mathbb{K}^n$; $x' = S^{-1}x$ è il <u>vettore delle coordinate</u> di x … risp alla base …

$$\begin{tikzcd} Sx' \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \ni A(Sx') \\ x' \in \mathbb{K}^n \arrow[r] \arrow[u, "S"] & \mathbb{K}^n \ni (S^{-1}AS)x' \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

mondo delle coordinate risp alla base $s_1, \dots, s_n$

<u>Allora</u>: $S^{-1}AS$ è la matr che def l'azione di L_A nel "<u>mondo delle coord</u>" risp $s_1, \dots, s_n$

$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ t.c. $L_A(x) = Ax$

<u>def</u> (matrice diagonalizzabile): $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ <u>diagonalizzabile</u>

se: $\exists\, S \begin{cases} \in \mathbb{K}^{n\times n} \\ \text{invertibile} \end{cases}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

- $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$: <u>forma diagonale di</u> A

<u>Pb</u>: decidere se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile ed eventualm determ f diagonale di A e matr che realizza la similitudine.

<u>Oss</u>: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalizzabile

$\Leftrightarrow\ \exists\, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}^n$ lin indip, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$As_1 = \lambda_1 s_1, \ \dots, \ As_n = \lambda_n s_n$ (<u>dim</u>: …)

<u>def</u> (autovalore, autovettore)

- $\lambda \in \mathbb{K}$ <u>autovalore di</u> A se $\exists\, v \begin{cases} \in \mathbb{K}^n \\ \neq 0 \end{cases}$ t.c. $Av = \lambda v$
- $v \begin{cases} \in \mathbb{K}^n \\ \neq 0 \end{cases}$ <u>autovettore di</u> A se $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $Av = \lambda v$
- $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \begin{cases} \in \mathbb{K}^n \\ \neq 0 \end{cases}$ t.c. $Av = \lambda v$: λ autovalore di A <u>associato a</u> v; v autovettore di A <u>associato a</u> λ

<u>Es</u> (1) $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matr identica:

- $1 \in \mathbb{R}$ è autovalore di I (infatti …)
- $\forall v \begin{cases} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{cases}$ è autovettore di I (infatti …)
- $\lambda \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \neq 1 \end{cases}$ <u>non è</u> autovalore di I (infatti …)

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

- 1 è autovalore di A [ad es: $A\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$]
- -1 è autovalore di A [ad es: $A\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$]
- $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ <u>non è</u> autovettore associato a -1

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: A non ha autovalori

infatti: ... ovvero: $\exists$ matrici che non hanno autovalori e autovettori

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$:

- i è autovalore di A

infatti: ... ovvero: ATTENZIONE al campo a cui appartengono gli elem della matrice !!

Es (per casa):

① $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$: dim che 1 è autovalore di C

② Dim che: se v è autovettore di $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, esiste un solo $\lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $Av = \lambda v$.

Oss: • $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste base di $\mathbb{K}^n$ costituita da autovettori di A.

• A diagonalizzabile e $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ f. diagonale di A. Allora $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono autovalori di A

Es: ① $I \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è diagonalizzabile (esiste base di autovettori...)

② $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ non è diagonalizzabile ($\nexists$ base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori)

Sub-Pb: come determinare autovalori ed autovettori di $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Oss: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Allora:

$\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di A $\Leftrightarrow \exists\, v \begin{smallmatrix} \in \mathbb{K}^n \\ \neq 0 \end{smallmatrix}$ t.c. $Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow \exists\, v \begin{smallmatrix} \in \mathbb{K}^n \\ \neq 0 \end{smallmatrix}$ t.c. $(A - \lambda I)v = 0$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

dunque: $\boxed{\lambda \in \mathbb{K} \text{ autovalore di } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0}$

questa condiz consente di decidere se λ è autovalore di A senza dover determ un $v \in \mathbb{K}^n$ che verifica la def !!

Es: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Allora:

$\forall x \in \mathbb{K}$, $\det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{pmatrix} = (a_{11}-x)(a_{22}-x) - a_{21}a_{12}$

$= (-x)^2 + (-x)(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$

$\forall$ matrice di $\mathbb{K}^{2\times 2}$, $\det(A - xI)$ è un polinomio a coeff in $\mathbb{K}$ di grado 2.

def (polinomio caratteristico)

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. la funzione $p_A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ def da

$$p_A(x) = \det(A - x I)$$

è un polinomio a coeff in $\mathbb{K}$ di grado n detto polinomio caratteristico di A