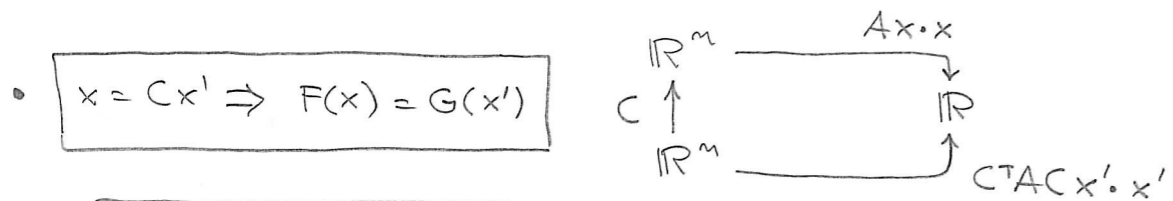


Oss: $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertibili.

* $F(x) = Ax \cdot x$ (f. quadr associata ad A)

* $G(x) = C^T A C x \cdot x$ (f. quadr associata a $C^T A C$)

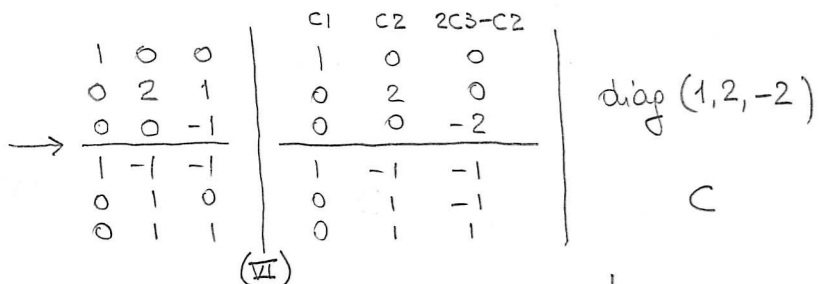
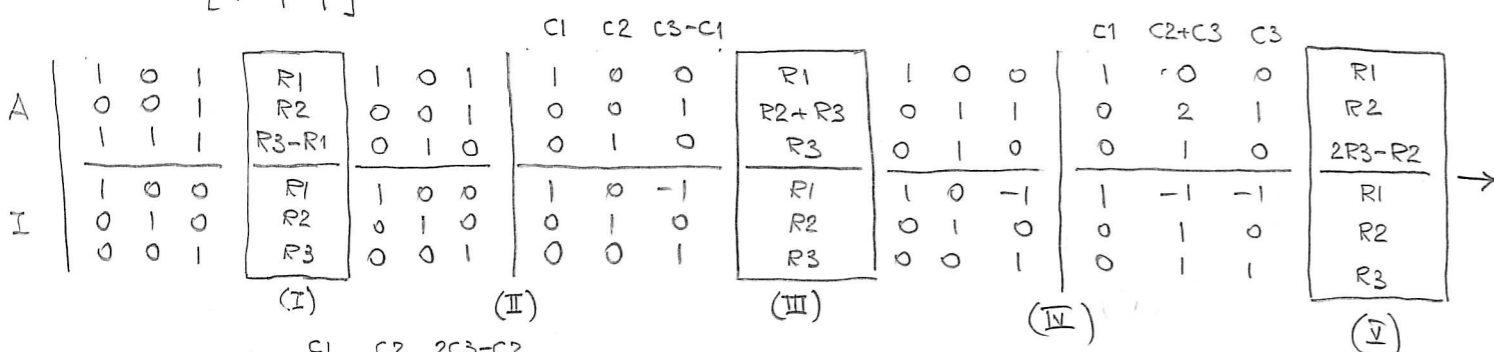


Q. di: classificare A e' equivalente a classificare $C^T A C$

Pb: $\exists C$ invertibile < facile da calcolare
 $C^T A C$ facile da classificare?

Risp: si! Gli esempi seguenti descrivono una procedura FACILE del det C invert t.c. $C^T A C$ e' diagonale.

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;



diag (1, 2, -2) = $C^T A C$

(I) $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} H_1 A \\ I \end{array} \right.$

(II) $\frac{H_1 A H_1^T}{H_1^T}$

(III) $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} H_2 H_1 A H_1^T \\ H_1^T \end{array} \right.$

(IV) $\frac{H_2 H_1 A H_1^T H_2^T}{H_1^T H_2^T}$

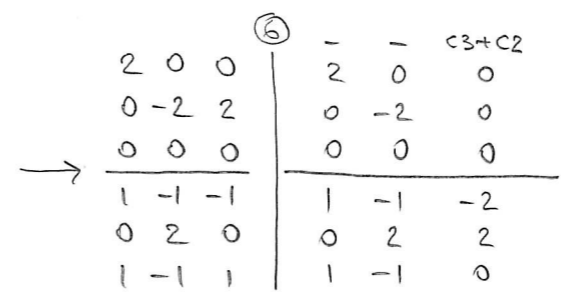
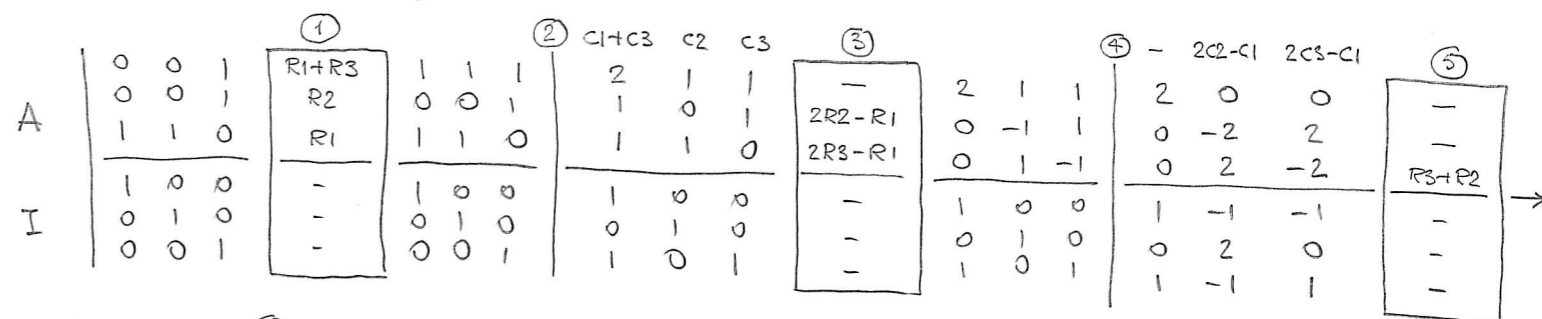
(V) $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} H_3 H_2 H_1 A H_1^T H_2^T \\ H_1^T H_2^T \end{array} \right.$

(VI) $\frac{H_3 H_2 H_1 A H_1^T H_2^T H_3^T}{H_1^T H_2^T H_3^T} = \text{diag} (1, 2, -2) = C$

Oss: le H_k sono triangolari con elem $\neq 0$ sulla diagonale, ovvero invertibili $\Rightarrow C$ invertibile!

diag (1, 2, -2) indef $\Rightarrow A$ indef

Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;



diag (2, -2, 0) = $C^T A C$

(1) $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} H_1 A \\ I \end{array} \right.$

(2) $\frac{H_1 A H_1^T}{H_1^T}$

(3) $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} H_2 H_1 A H_1^T \\ H_1^T \end{array} \right.$

(4) $\frac{H_2 H_1 A H_1^T H_2^T}{H_1^T H_2^T}$

(5) $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} H_3 H_2 H_1 A H_1^T H_2^T \\ H_1^T H_2^T \end{array} \right.$

(6) $\frac{H_3 H_2 H_1 A H_1^T H_2^T H_3^T}{H_1^T H_2^T H_3^T} = \text{diag} (2, -2, 0) = C$

diag (2, -2, 0) indef $\Rightarrow A$ indef

Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

A	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	↓	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	↓	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$	diag (0, 2, -2)
I	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	C

diag (0, 2, -2) = CTAC \Rightarrow A indefinita

Oss: la prima colonna di A è già "diagonale", perciò si inizia ad operare per rendere "diagonale" le seconde...

def (matrici congruenti): $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetriche;
 se $\exists C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile t.c. $B = C^T A C$,
 A e B si dicono CONGRUENTI

Oss: la congruenza è una relaz di equivalenza tra le matrici simmetriche di ordine n (ad elem in \mathbb{R}).

def (segnatura): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica; $\lambda_1, \dots, \lambda_n (\in \mathbb{R})$ autovalori di A.

Posto: $N = \# \lambda_k < 0$, $Z = \# \lambda_k = 0$, $P = \# \lambda_k > 0$
 la terna (N, Z, P) si dice INERZIA di A.

Es: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica con autovalori $-3, 1, 0, 1, 0, -2$.
 l'inerzia di A è $(2, 2, 2)$.

TEO (Sylvester): L'inerzia è invariante per congruenza.
 (dim: no)

Oss: la procedura presentata negli Es precedenti determina una sequenza di matrici congruenti l'ultima delle quali è diagonale.

Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$ A congruenti a diag (2, -2, 0)

- inerzia di A = inerzia di diag (2, -2, 0) = (1, 1, 1)
- autovalori di A: radici di $P_A(x) = -x^3 + 2x$
 ovvero: $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Oss: Per il TEO di Sylvester, tutte le matrici diagonali congruenti ad una stessa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica hanno lo stesso numero di elem negativi, nulli e positivi sulle diagonali.