Oss: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ; $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = Ax \cdot x$

"f. quadratica associata ad A" — ps canonico

- $F(0) = 0$
- A definita $\Rightarrow$ $0 \in \mathbb{R}^n$ è estremo assoluto <u>isolato</u> di F
- A semidef ma <u>non</u> def $\Rightarrow$ $0 \in \mathbb{R}^n$ è estr assol <u>non isolato</u> di F
- A indef $\Rightarrow$ $0 \in \mathbb{R}^n$ <u>non è</u> estremo di F.

Es: $A = I$, $F(x) = x_1^2 + x_2^2$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F(x) = x_1^2$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $F(x) = x_1^2 - x_2^2$

Es: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.
- f derivabile almeno 3 volte
- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 0$ (0 è un <u>punto stazionario</u>)

- SE $f''(0) \neq 0$ ALLORA : $f(x) \approx \frac{1}{2} f''(0) x^2$
  - (1) appross tanto migliore quanto più $|x|$ piccolo
  - (2) $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $0 < |x| < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ ha il <u>segno</u> di $f''(0)$
  - (3) $f''(0) > 0 \Rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ è minimo (relativo) isolato di f
    $f''(0) < 0 \Rightarrow$ " " massimo (") " "
- SE $f''(0) = 0$ ALLORA ... ?

Es: I) $f(x) = 3x^2 - 6x^3 = 3x^2(1 - 2x) \approx 3x^2$
- $f''(0) = 6 > 0$, $0 < |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > 0$
- $0 \in \mathbb{R}$ è minimo (relativo) isolato di f

II) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = -x^4$ ...

Pb: come decidere se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simm $\in$ DP, sDP, ...
(ovvero come classificare A) ?

TEO (classificaz mediante autovalori) :

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori di A

- simmetria $\Rightarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\exists Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonale t.c. A <u>simile</u> a $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $x \in \mathbb{R}^n$, $z = Q^T x$ (coord di x risp alla base ortonormale — risp al ps canonico in $\mathbb{R}^n$ — costituita dalle colonne di Q)

$\Rightarrow$ $Ax \cdot x = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) z \cdot z$

ovvero: $\boxed{\text{classificare A è equivalente a classificare } \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile . Allora:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "Ax \cdot x"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "C"] \arrow[ur, "Bx' \cdot x'"'] & \end{tikzcd}$$

$x = Cx'$ (x' coord di x risp...)

$\Rightarrow$ $Ax \cdot x = \underbrace{\boxed{C^T A C}}_{B} x' \cdot x'$

Il valore in $x \in \mathbb{R}^n$ della f. quadr associata ad A coincide, nel mondo delle coord risp alla base delle colonne di C, con il valore in $x' \in \mathbb{R}^n$ della f. quadr associata a $B = C^T A C$