

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica; $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = Ax \cdot x$
 "f. quadratiche associate ad A"
 ps canonico

- $F(0) = 0$
- A definita $\Rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n$ è estremo assoluto isolato di F
- A semidef ma non def $\Rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n$ è est. assol non isolato di F
- A indef $\Rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n$ non è estremo di F.

Es: $A = I, F(x) = x_1^2 + x_2^2$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F(x) = x_1^2$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, F(x) = x_1^2 - x_2^2$

Es: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ derivabile almeno 3 volte} \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array} \right.$ (0 è un punto stazionario)

- SE $f''(0) \neq 0$ ALLORA: $f(x) \approx \frac{1}{2} f''(0) x^2$
 - (1) appross tanto migliore quanto più $|x|$ piccolo
 - (2) $\exists \epsilon > 0$ t.c. $0 < |x| < \epsilon \Rightarrow f(x)$ ha il segno di $f''(0)$
 - (3) $f''(0) > 0 \Rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ è minimo (relativo) isolato di f
 $f''(0) < 0 \Rightarrow$ " " massimo (") " "
- SE $f''(0) = 0$ ALLORA ... ?

Es: I) $f(x) = 3x^2 - 6x^3 = 3x^2(1 - 2x) \approx 3x^2$

- $f''(0) = 6 > 0$, $0 < |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > 0$
- $0 \in \mathbb{R}$ è minimo (relativo) isolato di f

II) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = -x^4$...

Pb: come decidere se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è unum \in DP, SDP, ...
 (ovvero come classificare A)?

TEO (classificaz mediante autovalori):

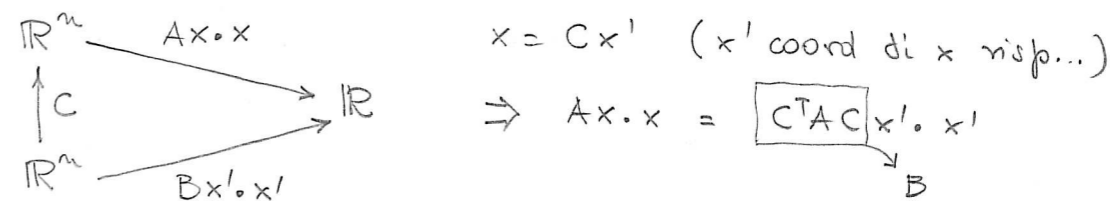
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori di A

- simmetria $\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\exists Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonale t.c. A simile a $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $x \in \mathbb{R}^n$, $z = Q^T x$ (coord di x risp alle base ortonormale - risp al ps canonico in \mathbb{R}^n - costituite dalle colonne di Q)
 $\Rightarrow Ax \cdot x = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) z \cdot z$

ovvero:

classificare A è equivalente a classificare $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile. Allora:



Il valore in $x \in \mathbb{R}^n$ delle f. quadr associate ad A coincide, nel mondo delle coord risp alle base delle colonne di C, con il valore in $x' \in \mathbb{R}^n$ delle f. quadr associate a $B = C^T A C$