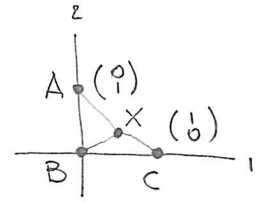
Es:



determ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c., posto $x = \binom{x_1}{x_2}$, le funzioni:

$$d(x_1,x_2) = d(x,A)^2 + d(x,B)^2 + d(x,C)^2$$

assuma valore minimo.

Sol:

$$d(x_1,x_2) = \left\| \binom{x_1}{x_2} - \binom{0}{1} \right\|^2 + \left\| \binom{x_1}{x_2} - \binom{0}{0} \right\|^2 + \left\| \binom{x_1}{x_2} - \binom{1}{0} \right\|^2$$

$$= x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_1^2 + x_2^2 + (x_1-1)^2 + x_2^2$$

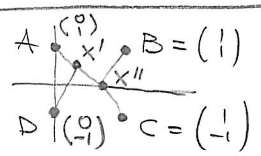
$$= \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2-1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1-1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2$$

dunque, posto $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ si ha $d(x_1,x_2) = \| Ax - b \|^2$

perciò le x_1, x_2 che rendono minima $d(x_1,x_2)$ sono le componenti della soluz dell'eq $Ax = b$ nel senso dei m.q.

- colonne di A lin indip $\Rightarrow \exists!$ soluz nel senso dei m q
- $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\boxed{\xi = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$

Es (per casa):



determ $x' = \binom{x_1'}{x_2'}$, $x'' = \binom{x_1''}{x_2''}$ tali che le funzione

$$d(x_1', x_2', x_1'', x_2'') = d(A,x')^2 + d(D,x')^2 + d(x',x'')^2 + d(x'',B)^2 + d(x'',C)^2$$

assuma valore minimo.

Es: Assegnati in $\mathbb{R}^2$ i punti

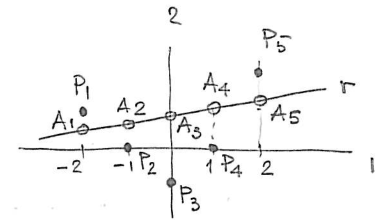
$$P_1 = \binom{-2}{1}, \quad P_2 = \binom{-1}{0}, \quad P_3 = \binom{0}{-1}, \quad P_4 = \binom{1}{0}, \quad P_5 = \binom{2}{2}$$

e la retta (non verticale) r di eq. $a_0 + a_1 x_1 = x_2$,

posto A_k = il punto di r di ascissa pari a quella di P_k, $k = 1, \dots, 5$, determ valori di a_0 ed a_1 in $\mathbb{R}$ t.c. la f

$$F(a_0, a_1) = d(A_1,P_1)^2 + \dots + d(A_5,P_5)^2$$

assume valore minimo.



Sol: si ha

$$F(a_0,a_1) = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} a_0 + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} a_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \| Ax - b \|_2^2$$

con $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \binom{a_0}{a_1}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Dunque, si cercano le soluz dell'eq $Ax = b$ nel senso dei mq

- colonne di A lin indip $\Rightarrow \exists!$ sol nel senso dei mq: $A^+ b$
- $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $A^+ b = \frac{1}{10} \binom{4}{2}$

la "retta che meglio approssima i punti $P_1, \dots, P_5$ nel senso dei minimi quadrati" è $\boxed{x_2 = \frac{2}{10} x_1 + \frac{4}{10}}$