Oss: $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $rk(A) = r$, $A = U \Sigma V^H$

- $\boxed{A = \sigma_1 u_1 v_1^H + \dots + \sigma_r u_r v_r^H}$
- $\forall k \in \{1, \dots, r\}$
  - $u_k v_k^H \in \mathbb{C}^{n \times k}$
  - $rk(u_k v_k^H) = 1$
  - $\| u_k v_k^H \|_2 = 1$ (dim: def + Schwartz)

TEO: $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $rk(A) = r$, $A = U \Sigma V^H$;

- $\nu \in \{1, \dots, r-1\}$, $A_\nu = \sigma_1 u_1 v_1^H + \dots + \sigma_\nu u_\nu v_\nu^H$ $[rk(A_\nu) = \nu]$

$$\Rightarrow \| A - A_\nu \|_2 = \| \sigma_{\nu+1} u_{\nu+1} v_{\nu+1}^H + \dots + \sigma_r u_r v_r^H \|_2 = \sigma_{\nu+1}$$

(E) $$\min \{ \| A - B \|_2,\ B \in \mathbb{C}^{n \times k},\ rk(B) \le \nu \} = \sigma_{\nu+1}$$

"A_ν è una migliore approssimazione di A tra tutte le matrici di rango $\le \nu$"

(dim: solo primo asserto... (#))

Oss: Σ_ν = la matrice che si ottiene da Σ azzerando gli elementi di posto $(\nu+1, \nu+1), \dots, (r, r)$

- $A_\nu = U \Sigma_\nu V^H$ $(\Rightarrow rk(A_\nu) = \nu)$

Es: $A = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ & \end{pmatrix} V^H$ • $rk(A) = 2$

- $A_1 = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ & \end{pmatrix} V^H$, $rk(A_1) = 1$
- $\| A - A_1 \|_2 = 1 = \min \{ \| A - B \|_2,\ B \in \mathbb{C}^{3 \times 2},\ rk(B) \le 1 \}$

(#) $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, $\|x\|_2 = 1$ (ovvero $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 = 1$)

$$(A - A_\nu) x = \sigma_{\nu+1} u_{\nu+1} \alpha_{\nu+1} + \dots + \sigma_r u_r \alpha_r$$

e $$\| (A - A_\nu) x \|_2^2 = \sigma_{\nu+1}^2 \alpha_{\nu+1}^2 + \dots + \sigma_r^2 \alpha_r^2 \le \sigma_{\nu+1}^2 (\alpha_{\nu+1}^2 + \dots + \alpha_r^2)$$

$$\le \sigma_{\nu+1}^2 (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2) = \sigma_{\nu+1}^2$$

inoltre, per $x = v_{\nu+1}$ si ha $\| (A - A_\nu) x \|_2^2 = \sigma_{\nu+1}^2$ ...