$A \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $b \in \mathbb{C}^n$

def: U, Σ, V decomp val sing di A

PSEUDOINVERSA di A: $A^+ = V \Sigma^+ U^H$

Pb: se $\hat{U}, \Sigma, \hat{V}$ è decompos val sing di A diversa da U, Σ, V

è vero che $\hat{V} \Sigma^+ \hat{U}^H = V \Sigma^+ U^H$ (ovvero: A^+ è "ben definita")?

Risp: sì!

Es (I): colonne di A lin indip

- $\ker A = \{0\}$ e $\ker A^H A \; (= \ker A) = \{0\}$, ovvero $A^H A \in \mathbb{C}^{k \times k}$ invertibile
- $b \in \operatorname{im} A \Rightarrow \mathcal{S}$ ha un solo elem: $A^+ b$
- $b \notin \operatorname{im} A \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$ e $\mathcal{S}_{MQ}$ ha un solo elem: $A^+ b$
- $b \in \mathbb{C}^n = \operatorname{im} A \overset{\perp}{\oplus} \ker A^H \Rightarrow \exists !\, \beta \in \operatorname{im} A$ t.c. $b - \beta \in \ker A^H$
- $\beta \in \operatorname{im} A$, $\ker A = \{0\} \Rightarrow \exists !\, x \in \mathbb{C}^k$ t.c. $\beta = Ax$ ...

Q.di: $\exists !\, x \in \mathbb{C}^k$ t.c. $Ax - b \in \ker A^H$, ovvero t.c. $A^H(Ax - b) = 0$

cioè $A^H A x = A^H b$. Tale elem è $\boxed{x = (A^H A)^{-1} A^H b}$

dunque: $\boxed{A^+ = (A^H A)^{-1} A^H}$.

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, invertibile;

- $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{im} A$, $x = A^+ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$

ii) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \operatorname{im} A$, $x = A^+ b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{MQ}$

Es (per casa): determ $\beta \in \operatorname{im} A$ e $\nu \in \ker A^T$ t.c. $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta + \nu$

Sol: cerchiamo $\beta_1, \beta_2, \nu_1 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I coeff si ricavano sfruttando l'ortogonalità ...

base im A — base ker A^T

Es (II): righe di A lin indip

- $\ker A^H = \{0\}$ e $\ker A A^H \; (= \ker A^H) = \{0\}$, ovvero $A A^H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile
- $\ker A^H = \{0\} \Rightarrow rk(A) = \dim \operatorname{im} A = n$
- $b \in \operatorname{im} A \Rightarrow \mathcal{S} \neq \emptyset$ e l'elem di minima norma è $(A^+ b)$ quello che appartiene a $\operatorname{im} A^H$.
- $x \in \operatorname{im} A^H \cap \mathcal{S}$ significa $Ax = b$ e $x = A^H z$ ovvero $A A^H z = b$ e cioè $z = (A A^H)^{-1} b$

dunque: $x = A^H (A A^H)^{-1} b \Rightarrow \boxed{A^+ = A^H (A A^H)^{-1}}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, invertibile;

- $A^+ = A^T (A A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
- $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = A^+ b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Es (per casa): determ $\mathcal{S}$ e l'unico elem in $\operatorname{im} A^T$.

Oss (decomposizione spettrale): $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitiana;

- $\exists\, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c. $A = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^H$ (A è diagonalizz mediante matrice unitaria)
- $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $Ax = \lambda_1 q_1 q_1^H x + \dots + \lambda_n q_n q_n^H x$ $\quad (Q = (q_1, \dots, q_n))$

$\Rightarrow A = (\lambda_1 q_1 q_1^H + \dots + \lambda_n q_n q_n^H)$ DECOMPOSIZIONE SPETTRALE di A

- $\forall k$:
  - $q_k q_k^H \in \mathbb{C}^{n \times n}$
  - $rk(q_k q_k^H) = 1$
  - $q_k q_k^H$ è pr ortogonale su q_k
  - $\| q_k q_k^H \|_2 = 1$