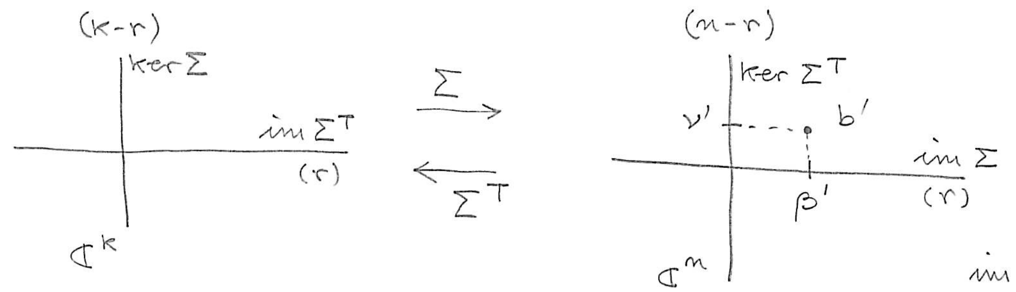

<u>Oss</u>: $b \notin \mathrm{im}\,A$ ovvero $b' \notin \mathrm{im}\,\Sigma$; $b = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\beta' \,\in\, \mathrm{im}\,\Sigma} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}}_{\nu' \,\in\, \ker \Sigma^T}$

- $\Sigma^+ b' = \begin{bmatrix} b'_1/\sigma_1 \\ \vdots \\ b'_r/\sigma_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \Sigma^+ \beta' =$ l'elem di norma minima di $\{x' \in \mathbb{C}^k \mid \Sigma x' = \beta'\} = \mathcal{S}'_{MQ}$

<u>Oss</u>: ξ' è l'elem di norma minima di $\mathcal{S}'_{MQ} \Leftrightarrow \xi = V\xi'$ è l'elem di norma minima di $\mathcal{S}_{MQ}$.
(<u>dim</u>: analoga all'asserto della lez precedente)

- l'elem di norma min di $\mathcal{S}_{MQ}$ è: $\xi = V\Sigma^+ b' = V\Sigma^+ U^H b$
ovvero $\boxed{\xi = A^+ b}$

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $b \in \mathrm{im}\,A \Rightarrow \mathcal{S} \neq \emptyset$
$\mathrm{rk}(A) = 2 \Rightarrow \dim \ker A = 1 \Rightarrow \mathcal{S}$ ha...

- determ l'elem di norma minima di $\mathcal{S}$

FORMULAZ EQUIVALENTE: determ $x^* \in \mathbb{R}^k$ che risolve il Pb
$\begin{cases} \min \|x\| & \leftarrow \text{f. da minimizzare (f. obiettivo)} \\ Ax = b & \leftarrow \text{vincolo} \end{cases}$

<u>Sol</u>:
- determino decompos v.s. di A: $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$
- calcolo A^+:
$A^+ = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- calcolo $\xi = A^+ b = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \mathrm{im}\,A$

- $\mathcal{S} = \emptyset$
- $\mathrm{rk}(A) = 1 \Rightarrow \dim \ker A = 1 \Rightarrow \mathcal{S}_{MQ}$ ha infiniti elementi

<u>Pb</u>: determ l'elem di $\mathcal{S}_{MQ}$ di norma minima.

<u>Sol</u>:
- $\mathrm{SVD}(A) = \Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{V}\Big)$
- $A^+ = V\Sigma^+ U^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\xi = A^+ b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

infatti...