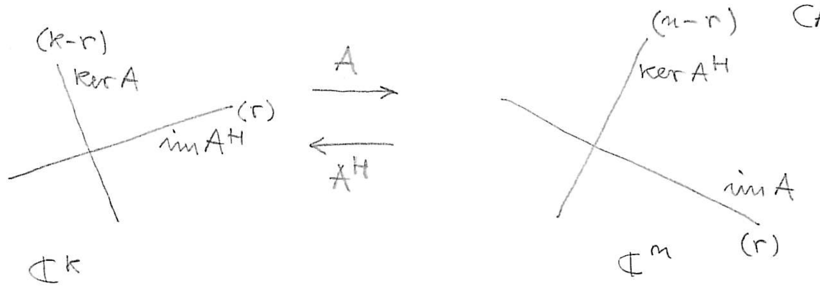
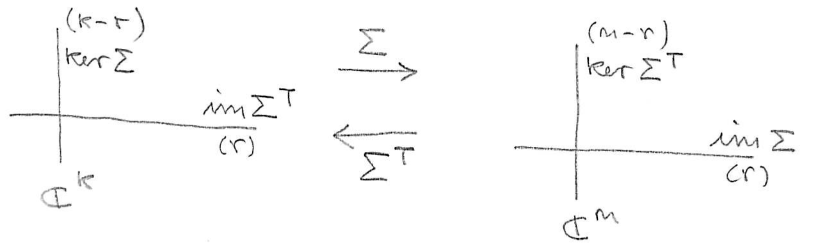
$A \in \mathbb{C}^{m\times k}$



$A = U\Sigma V^H$



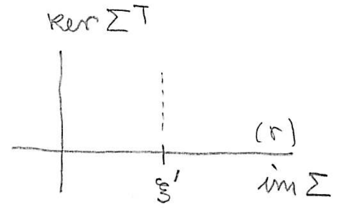
Oss: $b \in \operatorname{im} A$ ovvero $b' \in \operatorname{im} \Sigma$, $b' = (b'_1, \dots, b'_r, 0, \dots, 0)^T$

- $\mathcal{S} \neq \emptyset$, $\mathcal{S}' \neq \emptyset$
- $\mathcal{S}' = \{ x' \in \mathbb{C}^k \text{ t.c. } \Sigma x' = b' \}$

Es: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & & \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$; $\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_1 x'_1 = b'_1} \in \operatorname{im}\Sigma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \mathcal{S}' = \{ x' \in \mathbb{C}^3 \text{ t.c. } x'_1 = b'_1/\sigma_1 \}$

$= \left\{ x' \in \mathbb{C}^k \text{ t.c. } x'_1 = \frac{b'_1}{\sigma_1}, \dots, x'_r = \frac{b'_r}{\sigma_r} \right\}$

- 

l'elem di norma minima in $\mathcal{S}'$ è $\xi' = \left(\frac{b'_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{b'_r}{\sigma_r}, 0, \dots, 0 \right)^T$

def: $\Sigma^+ \in \mathbb{C}^{k\times m}$ t.c. $\sigma^+_{ij} = \begin{cases} 1/\sigma_k & \text{per } i = j = k \in \{1, \dots, r\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Es: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & & \end{pmatrix}$, $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & \\ & \\ & \end{pmatrix}$

- l'elem di norma min in $\mathcal{S}'$ è $\boxed{\xi' = \Sigma^+ b'}$

Oss: ξ' è l'elem di norma minima in $\mathcal{S}'$

$\Leftrightarrow \xi = V\xi'$ è l'elem di norma minima in $\mathcal{S}$

dim: $w \in \mathcal{S}$; $\|w\|^2 = \|Vw'\|^2 = \|w'\|^2 \geq \|\xi'\|^2 = \|V\xi'\|^2 = \|\xi\|^2$

...perché V è ortogonale... ...perché ξ' è l'elem...

- l'elem di norma minima in $\mathcal{S}$ è

$$\xi = V\xi' = V\Sigma^+ b' = V\Sigma^+ U^H b$$

$V\Sigma^+ U^H \overset{\text{def}}{=} A^+$ PSEUDOINVERSA di A

Es: $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ invertibile; U, Σ, V decompos ai v.s di A;

- verif che $\Sigma^+ = \Sigma^{-1}$;
- verif che $A^+ A = I$, e quindi $A^+ = A^{-1}$.

Es: $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ invertibile; U, Σ, V decompos ai v.s di A; determ una decompos ai v. sing di A^{-1}.

Sol: $A = U\Sigma V^H \Rightarrow A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^H$ (Σ è quadrato e invertibile ...) ma V, Σ^{-1}, U non è decompos ai v.s perché gli elem sulla diag di Σ^{-1}...