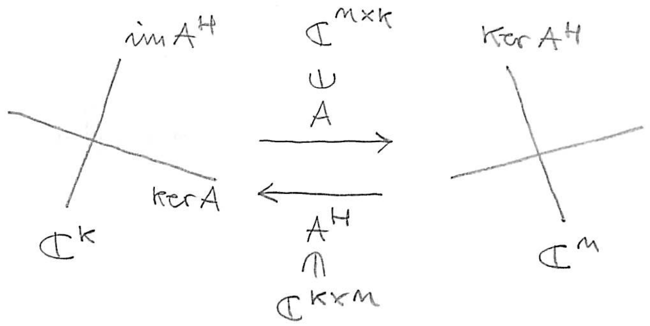


Pb: dati $A\in\mathbb{C}^{m\times k}$, $b\in\mathbb{C}^m$ determ $x\in\mathbb{C}^k$ t.c. $Ax=b$ "SOLUZIONI dell'eq..."

def: $\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{C}^k \text{ t.c. } Ax=b\}$

I) $b\in \operatorname{im}A$; allora...

- $\exists$ soluzione ($\mathcal{S}\neq\emptyset$)
- $x^*\in\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} = x^*+\ker A$ (soluz UNICA $\Leftrightarrow$ $\ker A=\{0\}$)
- $\mathbb{C}^k$ con ph canonico; l'elemento di $\mathcal{S}$ che ha norma minima è quello che appartiene a im A^H:

$$v \begin{cases} \in \mathcal{S} \\ \in \operatorname{im} A^H \end{cases}, \quad y\in\mathcal{S}$$

* $y = v + w$, $w\in\ker A$

* $\|y\|^2 = \|v+w\|^2 \underset{\ker A\,\perp\,\operatorname{im}A^H\ldots}{=} \|v\|^2+\|w\|^2 \geq \|v\|^2$

Q. di $\|y\|\geq\|v\|$.

II) $b\notin\operatorname{im}A \Rightarrow \mathcal{S}=\emptyset$.

Es: $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$; • $b\in\operatorname{im}A$, $x^*=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\in\mathcal{S}$

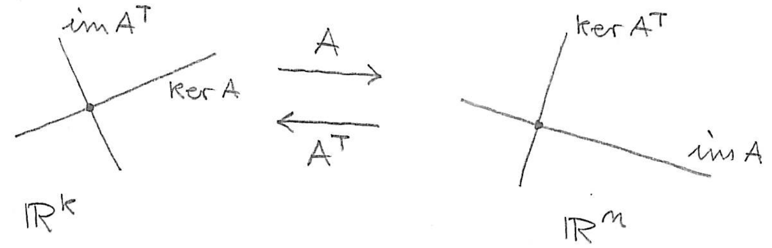
- $\mathcal{S} = x^*+\ker A = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\rangle = \left\{\begin{bmatrix}1+\lambda\\-\lambda\\\lambda\end{bmatrix}, \lambda\in\mathbb{R}\right\}$
- $y\in\mathcal{S}\Rightarrow \|y\|^2 = (1+\lambda)^2+2\lambda^2 = F(\lambda)$; $F'(\lambda) = 2(1+\lambda)+4\lambda = 6\lambda+2$

$F'(\lambda)=0$ per $\lambda=-1/3$; l'elem di $\mathcal{S}$ di norma minima è $\begin{bmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{bmatrix}$.

- $\boxed{\text{Es: determ } \mathcal{S}\cap\operatorname{im}(A^T). \text{ (Sol: } x\in\operatorname{im}(A^T)\Leftrightarrow x\perp\ker A\ldots)}$

Oss: Il punto III del Teo riguardante l'$\exists$ di una decompos ai valori sing di $A\in\mathbb{C}^{m\times k}$, garantisce che SE $a_{ij}\in\mathbb{R}$ ALLORA $\exists$ $v_1,\ldots,v_k$ base on di $\mathbb{R}^k$, $u_1,\ldots,u_m$ base on di $\mathbb{R}^m$ t.c....

Ripetendo i ragionamenti fatti per dedurre le decompos $\mathbb{C}^k=\ker A\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{im}A^H$ e $\mathbb{C}^m=\ker A^H\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{im}A$ nel caso di $a_{ij}\in\mathbb{R}$ si ottiene:



Oss: $\exists\, v \begin{cases} \in\mathcal{S} \\ \in\operatorname{im}A^H\end{cases}$ infatti:

- $\mathcal{S}\neq\emptyset \Rightarrow \exists\, x\in\mathcal{S}\subset\mathbb{C}^k = \ker A\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{im}A^H$

$\Rightarrow x = x_1 + x_2$, $x_2\in\ker A$, $x_1\in\operatorname{im}A^H$

- $x_1 = x - x_2 \begin{cases}\in\operatorname{im}A^H \\ Ax_1 = A(x-x_2) = Ax-Ax_2 = b+0 = b\end{cases}$

ovvero: $x_1\in\mathcal{S}$.