[3] DECOMPOSIZIONE AI VALORI SINGOLARI

def (SVD): decomposiz ai valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{m\times k}$ è una terna di matrici U, Σ, V t.c.

- $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitaria, $V \in \mathbb{C}^{k\times k}$ unitaria
- $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times k}$ "diagonale" (ovvero: $\sigma_{ij} = 0$ per $i \neq j$), ad elementi in $\mathbb{R}$, con $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \dots \geq \sigma_{pp} \geq 0$, $p = \min(k,m)$
- $A = U\Sigma V^H$.

Gli elementi σ_{ii} si chiamano VALORI SINGOLARI di A:

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$

Si ha: $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{V^H}$ valori singolari di A: $\sqrt{2}, 0$

TEO: $A \in \mathbb{C}^{m\times k}$, si ha:

(I) esistono U, Σ, V decompos ai val sing di A;
(II) il fattore Σ è univocam determ, U, V no;
(III) se $a_{ij} \in \mathbb{R}$ per ogni i,j allora è possibile scegliere U, V ad elementi in $\mathbb{R}$

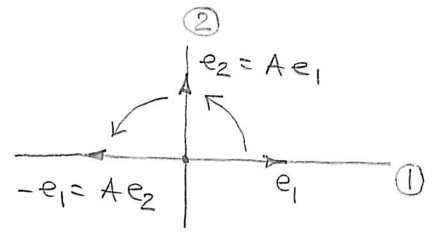
(dim: no, ma deducibile da esempi)

Oss (int geometrica): $A \in \mathbb{C}^{m\times k}$; $\underbrace{U = (u_1, \dots, u_m), \Sigma, V = (v_1, \dots, v_k)}_{\text{SVD di } A}$ $(A = U\Sigma V^H)$

- $u_1, \dots, u_m$ è base on di $\mathbb{C}^m$
- $v_1, \dots, v_k$ è base on di $\mathbb{C}^k$
- $\forall x \in \mathbb{C}^k$, posto $y = Ax$ si ha
  - $x' = V^H x$ (coord di x rispetto $v_1, \dots, v_k$)
  - $y' = U^H y$ (coord di y rispetto $u_1, \dots, u_m$)
  - $y' = U^H y = U^H A x = U^H A V x' = \Sigma x'$

ovvero: nel mondo delle coordinate, l'applicaz def da A è "diagonale".

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ "rotaz di $\frac{\pi}{2}$ in $\mathbb{R}^2$";



$U = (e_2, -e_1)$, $V = (e_1, e_2)$

$\Sigma = I$

rispetto alle basi scelte, l'applicaz è rappres dalla matrice identica.

Oss: la matrice A è diagonalizz su $\mathbb{C}$ (Es: diagonalizzare A!) ma non su $\mathbb{R}$ (infatti: $\sigma(A) = \{i, -i\} \not\subset \mathbb{R}$) q.di $\nexists$ base di $\mathbb{R}^2$ t.c. ... Nella SVD si utilizzano basi diverse nel dominio e nell'immagine...

Es: Verif che $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è normale, e determ $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ortogonale e $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ t.c. $A = U\Lambda U^H$.

Pb. come determ una decomp ai val sing?

Oss: $A \in \mathbb{C}^{m\times k}$, (U, Σ, V) decompos ai v.s.

Allora:

$$A^H A = V\Sigma^H (U^H U)\Sigma V^H = V(\underset{\text{diagonale}}{\Sigma^H \Sigma}) V^H$$

è una diagonalizzaz di $A^H A$