Sia $u \in \mathbb{R}^m$: $u_k = 1$ per $k = 1 \dots m$

Def (MATRICE STOCASTICA)

$$P = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ T.C.}$$

1) $p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1 \dots m$

2) $u^T p_k = 1 \quad \forall k = 1 \dots m$

si chiama MATRICE STOCASTICA

PROPRIETÀ

Posto $\mathcal{S} = \{ v \in \mathbb{R}^m \text{ T.C. } v_k \geq 0 \ \forall k = 1 \dots m \}$

$$X(\rho) = \{ v \in \mathcal{S} \text{ T.C. } u^T v = \rho \} \quad \rho \text{ reale e positivo}$$

si ha:

A) $v \in \mathcal{S} \Rightarrow Pv \in \mathcal{S}$

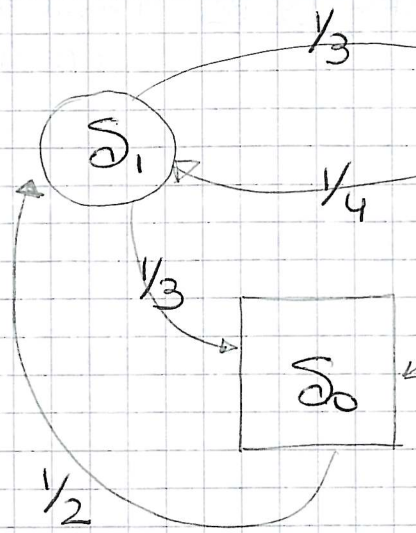
B) se $x \in X(\rho)$, $u^T(Px) = (u^T p_1, \dots u^T p_m) x = u^T x = \rho$

ovvero: $x \in X(\rho) \Rightarrow Px \in X(\rho)$

OSS: Siano $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una matrice stocastica e $v \in X(\rho) \subset \mathbb{R}^m$ con ρ reale positivo.
Sia inoltre v_k, $k = 0, 1, \dots$ la successione generata da: $v_0 = v$; $v_{k+1} = P v_k$, $k = 0, 1 \dots$

Allora: B) $\Rightarrow$ $v_k \in X(\rho) \ \forall k$

Es: Il seguente grafico rappresenta i movimenti di denaro mensile che intercorrono tra tre soggetti (S_1: "dip. statale", S_2: "lav. autonomo", S_0: "stato") e si legge così:



Ogni mesi

S_1 cede $1/3$ dei soldi a S_2 (x acquisti)

" " " " " " S_0 (x Tasse)

S_2 " $1/4$ " " " S_1 (x servizi)

" " $1/4$ " " " S_0 (x Tasse)

S_0 " $1/2$ " " " S_1 (stipendi)

Detto $x_k \in \mathbb{R}^3$ il vettore i cui elementi sono, rispettivamente, la ricchezza di S_1, S_2 e S_0, la ricchezza al mese successivo si ottiene da:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} x_k = P x_k$$

Ovviamente

- $x_k \in \mathcal{S}$
- Se $x_0 \in X(\rho)$, allora ρ è la "ricchezza del paese" che resta costante col passare dei mesi; si ha solo una redistribuzione ... $x_k \in X(\rho)\ \forall k$.

Problema: Cosa accade "a lungo andare"?
Consideriamo uno stato iniziale $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \in X(8)$

- $\sigma(P) = \{1, 0, 1/3\}$
- $\ker(P - I) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

$\ker(P) = \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$\ker(P - \tfrac{1}{3} I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{x_0 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- $$x_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to \infty]{} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- in generale

$$\begin{cases} x_0 = a_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_0 \in X(8) \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1$$

OSS: $Pv = \lambda v \Rightarrow u^T P v = u^T \lambda v = \lambda u^T v$

$$u^T P v = (u^T P) v = u^T v \Rightarrow u^T v = \lambda u^T v$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{oppure} \\ u^T v = 0 \end{cases}$$

da cui: $$x_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \left(\frac{1}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to \infty]{} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

OSS: P^2 ha tutti elementi positivi

Poiché $\forall x_0 \in X(8)$, $\lim_{k \to \infty} x_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, a lungo andare, comunque sia distribuita la ~~ricchezza~~ "ricchezza iniziale 8", la distribuzione tende a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Teorema

Data P stocastica e ρ reale positivo,

$\exists\, w \in X(\rho)$ t.c. $Pw = w$

(ovvero $1 \in \sigma(P)$ e $\ker(P - I) \cap X(\rho) \neq \emptyset$)

Dim

1) $X(\rho)$ è chiuso, limitato e convesso (infatti

se $x_1, x_2 \in X(\rho) \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X(\rho)$

per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$: dimostrare!)

2) P definisce un'applicazione lineare e continua su

$\mathbb{R}^n$ e $P(X(\rho)) \subset X(\rho)$.

Allora per il Teorema del pto fisso

$$\exists\, w \in X(\rho) : Pw = w \quad //$$

Teorema (di Markov)

Se $\exists\, N \in \mathbb{N}_+$ t. che $P^N > 0$ (cioè ha tutti elementi positivi)

allora:

- $\exists!\, w \in X(\rho)$ t.c. $Pw = w$ (VETTORE DI STABILITÀ)
- $\forall\, x_0 \in X(\rho)$, $\lim_{k \to \infty} P^k x_0 = w$