Es: $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$; $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$

- $A = \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} = \lambda I + N_1$; $N_1^2 = 0$, $N_1^k = 0$ per $k \geq 2$;

  * $A^2 = (\lambda I + N_1)(\lambda I + N_1) = \lambda^2 I + 2\lambda N_1 + \cancel{N_1^2}$

  * $A^3 = (\lambda^2 I + 2\lambda N_1 + N_1^2)(\lambda I + N_1) = \lambda^3 I + 3\lambda^2 N_1 + \cancel{3\lambda N_1^2} + \cancel{N_1^3}$

  * ... $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N_1^j$ $\left[\text{binomio di Newton: } \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \right]$

  ...$k \geq 1$... $= \binom{k}{0} \lambda^k I + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} N_1 = \lambda^k I + k\lambda^{k-1} N_1 = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$

- $x_k = A^k v = \begin{bmatrix} \lambda^k v_1 + k\lambda^{k-1} v_2 \\ \lambda^k v_2 \end{bmatrix}$ $(k \geq 1,\ x_0 = v)$

Es: (A) $\lambda = 1$, $x_k = \begin{bmatrix} v_1 + k v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$: $v_2 = 0 \Rightarrow x_k = v$ e $\lim_{k\to\infty} x_k = v$ (ovvero: scelta comunque una norma N su $\mathbb{C}^2$, $\lim_{k\to\infty} N(x_k - v) = 0$)

$v_2 \neq 0 \Rightarrow x_k$ non limitata (infatti $v_1 + k v_2$ non limitata)

Oss:

(1) $\lim_{k\to\infty} x_k = \ell \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = \ell_i$, $i = 1,2$

(2) x_k limitata $\Leftrightarrow x_{k,i}$ limitata, $i=1,2$

(dim: usare la norma N_∞.)

(B) $\lambda = 2$, $x_k = \begin{bmatrix} 2^k v_1 + k 2^{k-1} v_2 \\ 2^k v_2 \end{bmatrix}$

$v = 0 \Rightarrow x_k = 0$ e $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$

$v \neq 0 \Rightarrow x_k$ non limitata (se $v_2 \neq 0$, la seconda comp... se $v_2 = 0$ e $v_1 \neq 0$ la prima...)

(C) $\lambda = -1$, $x_k = \begin{bmatrix} (-1)^k v_1 + k(-1)^{k-1} v_2 \\ (-1)^k v_2 \end{bmatrix}$

$v_2 \neq 0 \Rightarrow$ non limitata (la prima componente...)

$v_2 = 0, v_1 \neq 0 \Rightarrow$ limitata ($N_\infty(x_k) \leq |v_1|$) ma non convergente (la prima comp...)

$v = 0 \Rightarrow x_k = 0$ e $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$

Per casa: (D) $\lambda = \frac{1}{2}$; determ x_k e decidere se limitata e/o convergente.