MATRICI NOTEVOLI E LORO PROPRIETÀ

CAFG / $\boxed{24}$, $\boxed{25}$
7 aprile 2009
(C32)

MATRICI SIMMETRICHE $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j = 1 \dots m$, cioè $A = A^T$

- gli autovalori sono tutti REALI
- Autovettori associati ad autovalori distinti sono ORTOGONALI
- $\exists$ una matrice ORTOGONALE $(Q^T Q = I)$ che diagonalizza A cioè $A = UDU^T$ $\quad D = \mathrm{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_m\}$
- $\|A\|_2 = \|A^T\|_2 = \rho(A)$ (in generale vale solo $\|A\| \geq \rho(A)$)

MATRICI HERMITIANE $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$: $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i,j = 1 \dots m$, cioè $A = A^H = \overline{A^T}$

Es: $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$

- gli elementi sulla diagonale sono REALI : $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$
- Autovettori associati ad autovalori distinti sono ORTOGONALI
- $\|A\|_2 = \|\overline{A^T}\| = \rho(A)$

MATRICI ANTISIMMETRICHE $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall i,j = 1 \dots m$, cioè $A = -A^T$

Es: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

- gli elementi sulla diagonale sono tutti ZERO
- gli autovalori sono immaginari o nulli

- $\|A\|_2 = \rho(A)$

MATRICI ANTIHERMITIANE $A \in \mathbb{C}^{n\times n} : a_{ij} = -\overline{a_{ji}} \quad \forall\, i,j = 1..n$, cioè

$A = -A^H = -\overline{A}^T$

Es: $\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & 5i \end{pmatrix}$

- Gli elementi sulla diagonale sono tutti IMMAGINARI PURI
- gli autovalori sono tutti immaginari puri
- $\|A\|_2 = \rho(A)$

MATRICI UNITARIE $U \in \mathbb{C}^{n\times n} : U\overline{U}^T = \overline{U}^T \cdot U = I$

ovvero sono matrici invertibili la cui inversa coincide con la sua trasposta coniugata

- Una matrice unitaria avente tutte entrate reali è ORTOGONALE
- Se $<\,,\,>$ è il p.s. hermitiano canonico su uno spazio vett. V

$$<Ux, Uy> = <x, y> \quad \forall x, y \in V$$

- Il determinante è $= \pm 1 \quad \forall\, U$ ORTOGONALE

$(\det(U^T U) = \det(U^T)\det(U) = \det U^2 = 1 \Rightarrow \det(U) = \pm 1)$

- gli autovalori di una matrice unitaria sono complessi che hanno modulo 1 (cioè stanno sul cerchio unitario)

MATRICI NORMALI $A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \overline{A}^T \cdot A = A \cdot \overline{A}^T$

Es: sono normali le matrici unitarie, ortogonali, hermitiane, antihermitiane...

L'insieme delle matrici normali è però più ampio,

es: $\begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$