Oss: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $v \in \mathbb{C}^n$; si cons la success in $\mathbb{C}^n$ definita da

$$\begin{cases} x_0 = v \\ x_k = A x_{k-1}, \quad k = 1,2,\dots \end{cases} \qquad \text{Si ha} \quad \boxed{x_k = A^k v, \quad k = 0,1,2,\dots}$$

Es: $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$

- $x_k = A^k v = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k)\, v = \begin{bmatrix} \lambda_1^k v_1 \\ \lambda_2^k v_2 \end{bmatrix}$

- si cons in $\mathbb{C}^2$ la norma $\|\cdot\|_\infty$;

  * x_k <u>limitata</u> $(\exists L \in \mathbb{R} : \forall k, \|x_k\|_\infty \leq L)$ <u>per ogni</u> $v \in \mathbb{C}^2$
  $\Leftrightarrow$ $|\lambda_1| \leq 1$ e $|\lambda_2| \leq 1$ (in tal caso: $\|x_k\|_\infty \leq \|v\|_\infty$)

  > Es: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_k$ limitata se $v = \binom{0}{1}$, non limitata se $v = \binom{1}{0}$
  > (<u>OVVERO</u>: se $|\lambda_1| > 1$ o $|\lambda_2| > 1$, $\exists v \in \mathbb{C}^2$ t.c. x_k non lim)

  * $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ <u>per ogni</u> $v \in \mathbb{C}^2$ $\Leftrightarrow$ $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$

  > Es: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \forall v, \lim_{k\to\infty} x_k = v$;
  > $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1/2 \Rightarrow x_k$ non convergente se $v = \binom{1}{0}$,
  > $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ se $v = \binom{0}{1}$;
  > $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = 1+i \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k \ \exists$ solo se $v = \binom{0}{0}$.

  Oss: $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall j, \lim_{k\to\infty} x_{k,j} = 0$

Oss: il comportam della success x_k dipende solo da A e v;
le richieste "... $\forall v \in \mathbb{C}^2$" eliminano la dipendenza da v,
perciò le condizioni riguardano <u>SOLO</u> A.

Es: $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ diagonalizzabile;

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \arrow[r, "C=(c_1,c_2)"] \arrow[d, "\Lambda"'] & \mathbb{C}^2 \arrow[d, "A"] \\ \mathbb{C}^2 \ (\text{coord}) & \mathbb{C}^2 \arrow[l, "C^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Oss: x_k success in $\mathbb{C}^2$, $w_k = C^{-1} x_k$ (success delle coord risp c_1, c_2)

- x_k limitata $\Leftrightarrow$ w_k limitata
- $\lim x_k = 0 \Leftrightarrow \lim w_k = 0$

(dim: $\|x_k\| = \|C w_k\| \leq \|C\|\,\|w_k\|$
$\|w_k\| = \|C^{-1} x_k\| \leq \|C^{-1}\|\,\|x_k\|$)

- per decidere se $x_k = A^k v$ sia limitata o se $\lim x_k = 0$
è <u>necess e suff</u> decidere se $w_k = \Lambda^k (C^{-1} v)$ sia limitata
o se $\lim w_k = 0$

— OVVERO: studiare il caso diagonale...