

Oss: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{C}^n$; si cons la success in \mathbb{C}^n definita da

$$\begin{cases} x_0 = v \\ x_k = A x_{k-1}, k=1,2,\dots \end{cases} \quad \text{Si ha } \boxed{x_k = A^k v, k=0,1,2,\dots}$$

Es: $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$

• $x_k = A^k v = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k) v = \begin{bmatrix} \lambda_1^k v_1 \\ \lambda_2^k v_2 \end{bmatrix}$

• si cons in \mathbb{C}^2 la norma $\|\cdot\|_\infty$;

* x_k limitata ($\exists L \in \mathbb{R} : \forall k, \|x_k\|_\infty \leq L$) per ogni $v \in \mathbb{C}^2$

$\Leftrightarrow |\lambda_1| \leq 1 \text{ } \textcircled{\&} \text{ } |\lambda_2| \leq 1$ (in tal caso: $\|x_k\|_\infty \leq \|v\|_\infty$)

Es: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_k$ limitata se $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, non limitata se $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 (OVVERO: se $|\lambda_1| > 1 \text{ } \textcircled{\&} \text{ } |\lambda_2| > 1, \exists v \in \mathbb{C}^2$ t.c. x_k non lim)

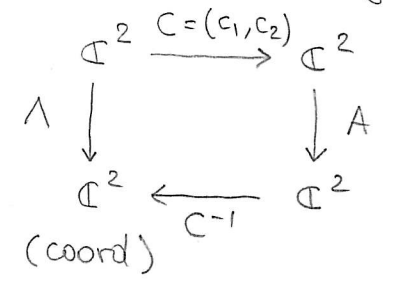
* $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ per ogni $v \in \mathbb{C}^2 \Leftrightarrow |\lambda_1| < 1 \text{ } \textcircled{\&} \text{ } |\lambda_2| < 1$

Es: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \forall v, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = v$;
 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1/2 \Rightarrow x_k$ non convergenti se $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ se $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = 1+i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \exists$ solo se $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Oss: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$
 $\Leftrightarrow \forall j, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,j} = 0$

Oss: il comportam della success x_k dipende solo da A e v ;
 le richieste "... $\forall v \in \mathbb{C}^2$ " eliminano la dipendenza da v ,
 perciò le condizioni riguardano SOLO A .

Es: $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ diagonalizzabile;



Oss: x_k success in \mathbb{C}^2 , $w_k = C^{-1} x_k$ (success delle coord risp c_1, c_2)

- x_k limitata $\Leftrightarrow w_k$ limitata
- $\lim x_k = 0 \Leftrightarrow \lim w_k = 0$

(dim: $\|x_k\| = \|C w_k\| \leq \|C\| \|w_k\|$
 $\|w_k\| = \|C^{-1} x_k\| \leq \|C^{-1}\| \|x_k\|$)

• per decidere se $x_k = A^k v$ sia limitata o se $\lim x_k = 0$
 è necess e suff decidere se $w_k = \Lambda^k (C^{-1} v)$ sia limitata
 o se $\lim w_k = 0$
 — OVVERO: studiare il caso diagonale...