Es: dati $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$;

Pb: misurato $x \simeq x_0$, stimare $A x_0$.

Soluzione: si usa Ax per stimare Ax_0.

Misura dell'errore (assoluto...) commesso:

* introduciamo norma in $\mathbb{R}^n$ (N, che induce $\|\bullet\|_N$ ...)

* $EA = N(Ax - Ax_0) = N(A(x - x_0))$

$$\leq \|A\|_N \, N(x - x_0) = \|A\|_N \, EM$$

lettura: l'errore commesso NON SUPERA $\|A\|_N$ volte l'errore di misura.

Oss: • continuità: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ t.c. $EM < \delta \Rightarrow EA < \varepsilon$

(scelta buona: $\delta = \varepsilon / \|A\|_N$ ... è indip da x_0 !)

• la stima è "la migliore possibile" nel senso che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $EM < \varepsilon$ (e) $EA = \|A\|_N \, EM$

lettura: $\boxed{\text{l'errore massimo commesso utilizz } Ax \text{ per stimare } Ax_0 \text{ è } \|A\|_N \text{ volte l'errore di misura.}}$

Esempi:

* $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ortogonale, $N = N_2$; $\|Q\|_2 = 1$ (infatti ...)

(esempi concreti: rotazione con $n = 2, 3$; torsiez su asse (1) per $n = 3$)

* **Pb**: determ i coeff della retta $y = ax + b$ passanti per i punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Contesto: $x_1 \neq x_2$ esattam noti; y_1, y_2 misurati.

Sol: condiz su a, b: $\begin{cases} y_1 = a x_1 + b \\ y_2 = a x_2 + b \end{cases}$

ovvero: $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{y}$ **Oss**: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ matr invert!

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = X \;;$$

* VALORE ESATTO di c (ottenuto con "misure ideali" ovvero prive di errore): $c^* = X y^*$

* VALORE STIMATO di c (ottenuto dalle misure): $c = X y$

* introduciamo norma in $\mathbb{R}^2$ (N):

$$N(c - c^*) = N\left(X(y - y^*)\right) \leq \|X\|_N \, N(y - y^*)$$

Esempi:

• $x_1 = 1, x_2 = 2$, $N = N_\infty$: $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\|X\|_\infty = 3$

("caso buono": l'errore massimo commesso è 3 volte l'errore di misura)

• $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \alpha$, $\alpha \in (0,1)$, $N = N_\infty$: $X = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 1+\alpha & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\|X\|_\infty = \frac{2 + \alpha}{\alpha} \Rightarrow \forall L > 0 \; \exists \alpha \in (0,1)$ t.c. $\|X\|_\infty > L$

("caso cattivo": SE α molto piccolo, errore massimo commesso molto maggiore dell'err di misura!)