OPERATORI CONTINUI / LIMITATI

Una norma induce naturalmente sullo sp. vett. V su cui è definita una metrica in base alla quale è possibile dare la nozione di convergenza di una successione

Def Data una norma $\|\cdot\|$ su V e una success. di elementi $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$, e $v \in V$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \iff \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0$$

ovvero $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \|v_n - v\| < \varepsilon \ \forall n > \nu$

OSSERVAZIONE

Due norme sono equivalenti $\iff$ l'insieme delle succ. convergenti rispetto ad una è uguale all'insieme delle succ. convergenti rispetto all'altra.

Dim

$\Rightarrow)$ $\exists \alpha, \beta > 0$: $\alpha \|v\|_* \le \|v\|_{**} \le \beta \|v\|_*$

Se $v_n \to v$ in $\|\cdot\|_*$, $\exists \nu : \|v_n - v\|_* < \varepsilon/\beta \ \forall n > \nu$

$\Rightarrow \|v_n - v\|_{**} \le \beta \|v_n - v\|_* < \frac{\varepsilon}{\cancel{\beta}} \cdot \cancel{\beta} \ \forall n \ge \nu$

...

$\Leftarrow)$ Per assurdo: $\nexists \beta > 0$ per cui $\|v\|_{**} \le \beta \|v\|_*$ $\forall v \in V$, cioè $\forall \beta > 0 \ \exists v \in V$ per cui $\|v\|_{**} > \beta \|v\|_*$. Scelgo v_k: $\|v_k\|_{**} > k^2 \|v_k\|_*$ e considero $w_k = \dfrac{v_k}{k \|v_k\|_*}$

$\{w_k\}$ converge a zero rispetto a $\|\cdot\|_*$ ma non rispetto a $\|\cdot\|_{**}$ ... //

Esercizio

Verificare che $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sono equivalenti

Sol.

$\|x\|_1 \leq m\|x\|_\infty$ e ovviamente $\|x\|_1 \geq \|x\|_\infty \Rightarrow$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq m\|x\|_\infty$$

Analogamente

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

e

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{m}\,\|x\|_2$$

Def V e W spazi normati. Una funzione $f: V \to W$ è CONTINUA in $v_0 \in V$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.

$\|v - v_0\|_V < \delta \Rightarrow \|f(v) - f(v_0)\|_W < \varepsilon$

OSS: f è continua in $v_0 \Leftrightarrow \forall$ succ $\{v_n\}$ converg. a v_0 in $\|\cdot\|_V$ è anche $\{f(v_n)\}$ converg. in norma $\|\cdot\|$ a $f(v_0)$.

PROPOSIZIONE

Se $\|\cdot\|$ è una norma su uno sp. vett V, la funzione

$$f: V \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \|v\|$$

è CONTINUA

Dim

Dato $\varepsilon > 0$ cerco $\delta > 0$ per cui se $\|v - v_0\| < \delta \Rightarrow$ $|f(v) - f(v_0)| < \varepsilon$, cioè

$\big| \|v\| - \|v_0\| \big| < \varepsilon$. Ma

$\big| \|v\| - \|v_0\| \big| < \|v - v_0\|$ ... (come x disug. triang)

Basta dunque scegliere $\delta = \varepsilon$.

Equivalentemente: se $v_n \to v$ cioè $\|v_n - v\| \to 0$

dimostriamo che $\|v_n\| \to \|v\|$ cioè $\big| \|v_n\| - \|v\| \big| \to 0$

Ma $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \le \big| \|v_n\| - \|v\| \big| \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|v_n - v\|}$ la tesi

segue dal Teorema dei Carabinieri.

Def Un operatore lineare $T : V \to W$ si dice LIMITATO se $\exists M \geq 0 : \|Tv\|_W \leq M \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in V$

Cioè

$$\sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} < +\infty$$

Essendo T lineare $\displaystyle\sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\| = 1} \|Tv\|_W$

NORME DI MATRICI

$\to$ NORME INDOTTE DA NORME VETTORIALI

Sia $\|\cdot\|_*$ una norma vettoriale su $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) risulta naturalmente definita una norma sullo sp. vettoriale delle matrici $n \times n$ a coeff in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$).

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_* \neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \sup_{\|x\|_* = 1} \|Ax^*\| = \max_{\|x\|_* = 1} \|Ax^*\|$$

OSS: È una buona def. perché la matrice A rappresenta un operatore limitato: $Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ dove $a_1 \dots a_n$ sono le colonne di A $\Rightarrow$

$\|Ax\|_* = \|x_1 a_1 + \dots + x_n a_n\|_* \leq |x_1| \cdot \|a_1\|_* + \dots |x_n| \cdot \|a_n\|_* \leq$

$\leq \max\{|x_1|, \dots |x_n|\} (\|a_1\|_* \dots \|a_n\|_*) = \|x\|_\infty (\|a_1\|_* + \dots + \|a_n\|_*)) \leq$

$\leq \beta \|x\|_* (\|a_1\|_* \dots + \|a_m\|_*)$ con $\beta > 0$ opportuno (le norme in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) sono EQUIVALENTI)

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} \leq \beta (\|a_1\|_* + \dots + \|a_m\|_*)$$

La norma così definita è detta NORMA MATRICIALE INDOTTA DA $\|\cdot\|_*$ (o norma NATURALE)

PROPRIETÀ

1) Se $\|\cdot\|$ è una norma indotta $\Rightarrow \|I\| = 1$

Dim

Segue dalla def ...

OSS: Le norme nello spazio vett. delle matrici non sono solo quelle indotte. Per es. possiamo considerare la NORMA DI FROBENIUS:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2}$$

Tale ~~norma~~ norma non è indotta, infatti $\|I\|_F = \sqrt{m} \neq 1$

2) COMPATIBILITÀ: se $\|\cdot\|$ è indotta $\Rightarrow$

$$\|Ax\|_* \leq \|A\| \cdot \|x\|_* \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \ (o\ \mathbb{C}^m)$$

OSS: Possiamo considerare la norma del max:

$$\|A\|_{MAX} = \max_{i,j=1..m} |a_{ij}|$$

Tale norma non è indotta da $\|\cdot\|_\infty$, infatti se prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si ha:}$$

$\|A\|_{max} = 10$ ~~[illegible]~~ $Ax = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|Ax\|_\infty = 20$

20 ✗ 10

3) Se $\|\cdot\|$ è indotta $\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
(PROPRIETÀ DI CONSISTENZA)

$\|\cdot\|_{MAX}$ non è indotta da alcuna norma, infatti non è consistente:

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\|AB\|_{MAX} = 2 \not\leq \|A\|_{MAX} \cdot \|B\|_{MAX} = 1 \cdot 1 = 1$

Base s.r.l. Via Tosco Romagnola, 61 - 56012 Fornacette (PI) - Tel. 0587 422242 r.a. - Fax 0587 422243 - base@basenet.it - www.basenet.it