**Def**: Dato uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{C}$ un PRODOTTO HERMITIANO è un'applicazione

$$\cdot \; V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{T.c.}$$

1) $x \cdot y = \overline{y \cdot x} \quad \forall x, y \in V$ (HERMITIANA)

2) $x \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in V$
$x \cdot x = 0 \iff x = 0$ } DEF. POSITIVA

3) $\forall x, y, z \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ (x+y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\ (\lambda x) \cdot y &= \lambda (x \cdot y) \\ x \cdot (\lambda y) &= \bar{\lambda} (x \cdot y) \end{aligned}\right\} \text{SESQUILINEARE}$$

**Esempio** $V = \mathbb{C}^n \quad x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

Negli spazi vett. con prodotto scalare (hermitiano) vale la

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ

$$\boxed{|u \cdot v| \leq \sqrt{(u \cdot u)} \cdot \sqrt{(v \cdot v)} \quad \forall u, v \in V}$$

Ogni spazio vettoriale con pr. scalare (hermitiano) è NORMATO.
L'applicazione $U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

è infatti una norma

**Dim**

1), 2) Facili

3) $\|x+y\|^2 = (x+y) \cdot (x+y) \underset{\text{usata Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$ //

$\|x\|$ definita da $\sqrt{x \cdot x}$ è detta NORMA INDOTTA dal prodotto scalare (hermitiano)

Esempi

1) $V = \mathbb{C}^n$
$x \cdot y = \sum x_i \bar{y}_i \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_1^n |x_i|^2} = \|x\|_2$

2) $V = C([a,b], \mathbb{C})$

$$f \cdot g = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

la norma indotta è $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$

Vi sono però molte norme che non sono indotte da alcun prodotto scalare.

Teorema: Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) è indotta da un prodotto scalare se e solo se verifica l'IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMO:

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}$$

e in tal caso il prodotto scalare è dato da

$$x \cdot y = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad \text{se } V \text{ è su } \mathbb{R}$$

$$x \cdot y = \frac{1}{4}\left[\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\right] \quad \text{se } V \text{ è su } \mathbb{C}$$

Dim

Se $\|\cdot\|$ è indotta da $\cdot$ $\Rightarrow$ vale l'identità.

Se vale l'identità quello dato è effettivamente un prodotto scalare (hermitiano) e la norma indotta è proprio $\|\cdot\|$

Esempio

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad \|\cdot\|_1$ non è indotta, infatti non soddisfa l'identità del parallelogramma: basta scegliere $x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ...

---

PROPRIETÀ

Se $V$ è uno sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$), OGNI NORMA soddisfa la seguente proprietà:

$$\big|\, \|v\| - \|w\| \,\big| \le \|v+w\| \le \|v\| + \|w\| \quad \forall\, v, w \in V$$

Dim

$v = v + w - w \Rightarrow \|v\| \le \|v+w\| + \|w\|$

$w = w + v - v \Rightarrow \|w\| \le \|v+w\| + \|v\|$

da cui la tesi //

Geometricamente: