<u>def</u> (matrice diagonalizzabile):

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ <u>diagonalizzabile</u> (su $\mathbb{C}$) significa: $\exists\, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invert e $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonale t.c. $AC = C\Lambda$

(<u>ovvero</u>: $A$ è simile ad una matrice diagonale)

<u>Oss</u>: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizzabile. Allora:

- gli elem sulla diagonale di $\Lambda$ sono gli autovalori di $A$;
- le colonne di $C$ sono autovettori corrispondenti.

(<u>dim</u>: ...)

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,1,-1)$, $C = \begin{bmatrix} 0&1&1\\ 1&0&0\\ 0&1&-1 \end{bmatrix}$

- verif che $A$ e $\Lambda$ sono simili: $AC = C\Lambda$;
- determ $\Lambda'$ e $C'$ t.c. $AC' = C'\Lambda'$;
- determ $C''$ t.c. $AC'' = C''\Lambda$.

<u>Oss</u>: $\Lambda$ e $\Lambda'$ differiscono solo per l'<u>ordine</u> degli elem sulla diagonale.

<u>TEO</u> (diagonalizzabilità):

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $\exists$ base di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori di $A$ (<u>dim</u>: no)

<u>Es</u> (matrici non diagonalizzabili):

$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1\\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

- $p_M(x) = (\lambda - x)^2$: $\sigma(M) = \{\lambda\}$; $m.a.(\lambda) = 2$
- $\dim\ker(M - \lambda I) = 1$: $m.g.(\lambda) = 1$

$*$ $m.a.(\lambda) > m.g.(\lambda)$

$*$ $M$ non è diagonalizzabile

<u>Oss</u> (classi di matrici certamente diagonalizzabili): $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

- se gli autovalori di $A$ sono <u>distinti</u>, $A$ è diagonalizz;
- se $A$ è <u>hermitiana</u> ($A^T = \bar{A}$), è diagonalizzabile;
- se $A$ è <u>antihermitiana</u> ($A^T = -\bar{A}$), è diagonalizzabile.

<u>Es</u>:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1\\ x_2 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$; determ tutti i valori $x_1, x_2$ t.c. $A$ ha autovalori distinti.

(<u>Oss</u>: sono "quasi tutti"!)

- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1+i\\ \beta & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; determ tutti i valori $\alpha, \beta$ che rendono $A$ hermitiana.

(<u>Oss</u>: $A$ herm $\Leftrightarrow$ $a_{kk} \in \mathbb{R}$ e $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$; se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ...)

Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è <u>diagonalizz</u>, è facile descrivere il comportamento dell'appl $\mathcal{L}: v \to Av$, passando alle coordinate rispetto ad una opportuna base di $\mathbb{C}^n$ (quella costituita dalle colonne della matrice $C$ tale che $AC = C\Lambda$). Se $A$ <u>non è diagonalizz</u>, la descrizione è meno facile, ed occorre introdurre la

## FORMA CANONICA di JORDAN di una matrice

<u>def</u> (matrice diagonale a blocchi):

- $n_1, \dots, n_k$ interi positivi, $n_1 + \dots + n_k = n$
- $A_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$, $j = 1, \dots, k$

$$\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

<u>Es</u>: $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ ($n = 3$)

$A_1 = 1 \in \mathbb{C}^{1\times 1}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -i\\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -i\\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

<u>TEO</u> (FCJ): $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, spettro di $A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, $\nu_j = $ molt. geom $(\lambda_j)$;

- $\exists$ (univocam determ) $\delta_{11}, \dots, \delta_{1\nu_1}; \dots; \delta_{k1}, \dots, \delta_{k\nu_k}$ interi positivi tali che:

$A$ simile a $\boxed{\operatorname{diag}(J_{11}, \dots, J_{1\nu_1}, \dots, J_{k1}, \dots, J_{k\nu_k})}$ FORMA CANONICA di JORDAN di $A$

con $J_{rs} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_r \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\delta_{rs}\times\delta_{rs}}$ (<u>dim</u>: no...)