NORME

Def: V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), si dice NORMA SU V una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tale che

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$

   e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$: DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Def: Uno spazio vettoriale su cui è definita una norma si dice NORMATO

Esempi

1) $V = \mathbb{R}$ il valore assoluto di x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è una norma

2) $V = C([a,b], \mathbb{R})$ sp. vett. delle funzioni CONTINUE su $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$. La funzione

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

è una norma (NORMA UNIFORME)

3) $V = P_2(\mathbb{R})$ sp. vett. dei polinomi di grado 2 a coeff. reali. La funzione

$$\|a_0 + a_1 x + a_2 x^2\| \to |a_0| + |a_1| + |a_2|$$

è una NORMA (NORMA POLINOMIALE)

OSS: $p \to |a_0|$ non è una norma (Ex, se $p = x^2$, $|p| = 0$ ma $p \neq 0$)

4) NORME DI VETTORI

$V = \mathbb{R}^m$ (o $\mathbb{C}^m$)

Si definiscono le p_NORME (o norme di Hölder) per $1 \le p < \infty$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$p=1$ $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

$p=2$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2}$ (NORMA EUCLIDEA)

Si definisce inoltre

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |x_i|$$

Si può dimostrare che queste funzioni godono delle proprietà della norma. In particolare per dimostrare la disuguaglianza triangolare:

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

nota anche con il nome di DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKY

è necessario usare la seguente disuguaglianza:

dati $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\sum |x_i y_i| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad \forall x, y \in V$$

nota come DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER

Osserviamo che nel caso $m=2$, la disuguaglianza di Hölder è da la

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY - SCHWARZ

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

con $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ PRODOTTO SCALARE CANONICO

Esempio Se $x = (1,-1,2)$ $\|x\|_1 = 4$; $\|x\|_2 = \sqrt{6}$, $\|x\|_\infty = 2$

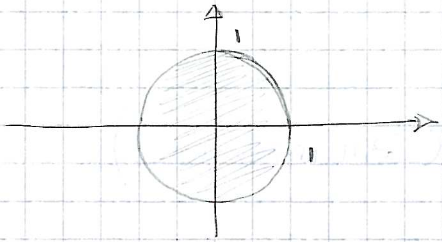
Def Si dice PALLA CHIUSA DI CENTRO $v \in V$ e raggio $r > 0$ il seguente insieme

$$B(v,r) = \{x \in V : \|x - v\| \le r\}$$

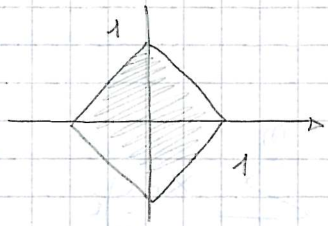
dove $\|\cdot\|$ è una norma su V

In $\mathbb{R}^2$ la palla chiusa di centro l'ORIGINE e raggio 1 rispetto alle norme 2, 1 e ∞ è:

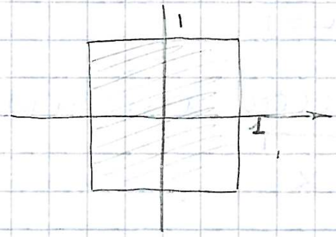
$p = 2$



$p = 1$



$p = \infty$



Def Due norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$ su uno sp. vettoriale V si dicono EQUIVALENTI se $\exists$ $0 < \alpha \le \beta$ 2 costanti positive tali che $\forall x \in V$

$$\alpha\|x\| \le \|x\|_* \le \beta\|x\|$$

In uno spazio di dim. finito (come $\mathbb{R}^n$ che ha dim. n) tutte le norme sono equivalenti

5) V = sp. vett con prodotto scalare.

Ricordiamo che dato V uno sp. vett su $\mathbb{R}$ un PRODOTTO SCALARE è un'applicazione

$$\cdot \quad V \times V \to \mathbb{R} \qquad \text{T.C.}$$

1] $x \cdot y = y \cdot x$ (SIMMETRICA)

2] $\left.\begin{array}{l} x \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in V \\ x \cdot x = 0 \iff x = 0 \end{array}\right\}$ (DEFINITA POSITIVA)

3] $\forall x, y, z \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \\ (\alpha x) \cdot y = \alpha (x \cdot y) \\ x \cdot (\alpha y) = \alpha (x \cdot y) \end{array}\right\} \quad \text{(BILINEARE)}$$

Esempio $V = \mathbb{R}^n \quad x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Tutti gli spazi vettoriali con prodotto scalare sono NORMATI: possiamo infatti definire $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$