<u>Oss</u> (matrice inversa): $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$

$$\underset{\text{(colonne di } A \text{ lin indip)}}{\mathrm{rk}(A) = m} \iff \underbrace{\begin{array}{l} \exists B \in \mathbb{C}^{m\times m} \text{ t.c. } AB = I \\ \exists C \in \mathbb{C}^{m\times m} \text{ t.c. } CA = I \end{array}}_{\text{"}A \text{ è invertibile"}} \quad (\Rightarrow \underbrace{B = C}_{A^{-1}})$$

INVERSA di A

- $\mathrm{rk}(A) = m \sim \mathrm{im}(A) = \mathbb{C}^m \sim \ker(A) = \{0\}$
  (dal teo della dimens...)

<u>Es</u>: $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$

- $v_1,\dots,v_r$ lin <u>dip</u> $\Rightarrow$ $Av_1,\dots,Av_r$ lin <u>dip</u> (usare def.)
- $Av_1,\dots,Av_r$ lin <u>indip</u> $\Rightarrow$ $v_1,\dots,v_r$ lin <u>indip</u>
- $v_1,\dots,v_r$ lin <u>indip</u> $\not\Rightarrow$ $Av_1,\dots,Av_r$ lin <u>indip</u>
- $\boxed{\text{SE } A \text{ invertibile}}$: $v_1,\dots,v_r$ lin <u>indip</u> $\Rightarrow$ $Av_1,\dots,Av_r$ lin <u>indip</u> (per assurdo...)

<u>Es</u>: $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ entrambe invertibili;

- AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

- $\underset{E_1}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A_1$
- $\underset{E_2}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}}}\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_2$

- $\ker(A) = \ker(A_2)$
  (<u>dim</u>: $Ax = 0 \sim A_2 x = 0$)

FORMA MATRICIALE dell'elim di Gauss

- $A_1 = E_1 A$
  $A_2 = E_2 A_1 = (E_2 E_1) A$
- E_1, E_2 invertibili $\Rightarrow$ $E_2 E_1$ invertibile
- le colonne I, II, <u>IV</u> di A_2 sono lin indip $\Rightarrow$ le colonne I, II, <u>IV</u> di A sono lin indip
- $\mathrm{rk}(A_2) = 3 \Rightarrow \mathrm{rk}(A) = 3$

<u>Oss</u>: $A, C \in \mathbb{C}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ <u>invert</u> t.c. $A = BC$

Allora:
- $c_{i_1},\dots,c_{i_r}$ colonne indip $\iff$ $a_{i_1},\dots,a_{i_r}$ indip
- $\mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(A)$
- $\ker(C) = \ker(A)$
- $\mathrm{im}(A)$ ed $\mathrm{im}(C)$...

la coppia B, C è una FATTORIZZAZIONE di A; si cerca di far sì che C sia "facilmente studiabile".

<u>def</u> (autovalore, autovettore...): $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$

- $\lambda \in \mathbb{C}$ è <u>autovalore</u> di A significa: $\exists v \begin{smallmatrix} \in \mathbb{C}^m \\ \neq 0 \end{smallmatrix}$ t.c. $Av = \lambda v$
  (un tale v si chiama <u>autovettore</u> di A rel all'autoval λ)
- se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di A, $\ker(A - \lambda I)$ si chiama <u>autospazio</u> di A relativo all'autoval λ, e $\dim\ker(A - \lambda I)$ si chiama <u>molteplicità geometrica</u> dell'autoval λ.

$\boxed{\text{Oss: } \lambda \in \mathbb{C} \text{ è autovalore di } A \iff \dim\ker(A - \lambda I) \geq 1}$

- $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di A $\iff$ λ è radice del <u>polinomio caratter</u> di A: $P_A(x) = \det(A - xI) \in \mathbb{C}[x]$.
- $P_A(x)$ p.c. di $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$; $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{C}$, distinti, e $\nu_1,\dots,\nu_r$ interi ≥ 1 t.c.

  $\nu_1 + \dots + \nu_r = m$; $P_A(x) = (\lambda_1 - x)^{\nu_1} \cdots (\lambda_r - x)^{\nu_r}$

  L'ins $\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ si chiama <u>spettro</u> di A (si denota con $\sigma(A)$) e ν_k si chiama <u>molteplicità algebrica</u> dell'autoval λ_k.

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$;

- * $\lambda = 0$ è autovalore? (No: $\ker(A) = \{0\}$)
- * $P_A(x) = \det(A - xI) = (1-x)^2(-1-x)$
  $\sigma(A) = \{1, -1\}$
- * $\ker(A - I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\ker(A + I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$
- * $\lambda = 1$ ha molt alg $= 2$ e molt geom $= 2$
  $\lambda = -1$ ha molt alg $= 1$ e molt geom $= 1$