- $A = (\underbrace{a_1, \dots, a_k}_{\in \mathbb{C}^m}) \in \mathbb{C}^{m \times k}$; $\mathcal{L} : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^m$ l'appl lin def da A.

def : * $\mathrm{im}(A) = \mathrm{im}\, \mathcal{L} = \{ v \in \mathbb{C}^m \mid v = Ax,\ x \in \mathbb{C}^k \} = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$
(IMMAGINE di A, è s.s.v. di $\mathbb{C}^m$)

* $\mathrm{rk}(A) = \dim \mathrm{im}(A)$; RANGO di A, $\leq m$
* $\ker(A) = \{ v \in \mathbb{C}^k \mid Av = 0 \}$ (NUCLEO di A, è s.s.v di $\mathbb{C}^k$)

TEO : $A \in \mathbb{C}^{m \times k}$; $\dim \mathrm{im}(A) + \dim \ker(A) = k$
(dim : no)

Oss : Teo $\Rightarrow \mathrm{rk}(A) \leq k$.

Es : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$

* $\mathrm{im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
* $\mathrm{rk}(A) = 2$
* $\dim \ker(A) = 3 - 2 = 1$
* $\ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Sol : $\mathrm{im}(A) = \{ b \in \mathbb{C}^3 \mid \exists \text{ sol di } Ax = b \}$

con elim Gauss : $Ax = b \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - b_1 \end{bmatrix}$ ha le STESSE SOLUZIONI di

q. di :
- $\mathrm{im}(A) = \{ b \in \mathbb{C}^3 \mid b_3 - b_1 = 0 \} = \dots$
- $\ker(A) = \{ x \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0 \} = \dots$

Es : $A = \begin{bmatrix} 3 & 3i \\ 0 & 0 \\ i & -1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 3+3i \\ 0 \\ i-1 \end{bmatrix}$

Pb : determinare TUTTE le sol dell'eq. $Ax = v$
(ovvero tutti gli elem di $\mathbb{C}^2 \dots$)

SOL : con elim Gauss $Ax = b \sim \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1/3 \\ b_2 \\ b_3 - \frac{i}{3} b_1 \end{bmatrix}$

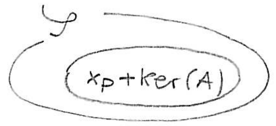
q. di
- $\mathrm{im}(A) = \{ b \in \mathbb{C}^3 \mid b_2 = 0,\ b_3 - \frac{i}{3} b_1 = 0 \} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i/3 \end{bmatrix} \right\rangle$ $(\mathrm{rk}(A) = 1)$
- $\ker(A) = \{ x \in \mathbb{C}^2 \mid x_1 + i x_2 = 0 \} = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$
- Oss : $v \in \mathrm{im}(A)$; $Ax = v \sim \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_p = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione!
- $\mathcal{S} = \{ x \in \mathbb{C}^2 \mid Ax = v \} = x_p + \ker(A) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
(vedere pag. seguente)

Oss : Siano $A \in \mathbb{C}^{m \times k}$, $v \in \mathbb{C}^m$ ed $x_p \in \mathbb{C}^k$ t.c. $A x_p = v$ (ovvero, x_p è <u>una</u> soluzione dell'equazione $Ax = v$). Allora, l'insieme $\mathcal{S}$ di <u>tutte</u> le soluzioni dell'equazione $Ax = v$ è

$$\mathcal{S} = x_p + \ker(A) = \{ x_p + w,\ w \in \ker(A) \}$$

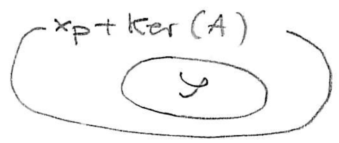
dim :

1) $\mathcal{S} \supset x_p + \ker(A)$



infatti, se $w \in \ker(A)$ si ha $A(x_p + w) = A x_p + A w = v + 0 = v$, ovvero $x_p + w \in \mathcal{S}$

2) $\mathcal{S} \subset x_p + \ker(A)$



infatti, se $f \in \mathcal{S}$ si ha $f - x_p \in \ker(A)$ $[\, A(f - x_p) = Af - A x_p = v - v = 0 \,]$
ovvero $f \in x_p + \ker(A)$.