CAFG / $\boxed{1}\boxed{2}$ 3 marzo 2009 (C32)

• PAGINA WEB del corso :

http://www.dma.unipi.it/
→ PERSONE → CIAMPA MAURIZIO
→ DIDATTICA → COMPLEMENTI...

$\boxed{0}$ RICHIAMI

$\mathbb{C}^n$ sp vett (su $\mathbb{C}$)

ins delle comb lin a coeff in $\mathbb{C}$

• dim $\mathbb{C}^n = n$ $\quad$ * $\exists\, v_1,\dots,v_n \in \mathbb{C}^n$ BASE

OVVERO : lin indip (e) $\langle v_1,\dots,v_n\rangle = \mathbb{C}^n$

* ogni base di $\mathbb{C}^n$ ha n elementi
* $m > n$ elementi di $\mathbb{C}^n$ sono lin dip

• $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ def appl lin $\mathcal{L} : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$, $\mathcal{L}(v) = Av$

* $A = (\overbrace{a_1,\dots,a_k}^{\in \mathbb{C}^n})$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^k$

$Av = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$ (la colonna Av è la comb lin delle colonne di A di coeff le componenti di v)

* per ogni appl lin $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$, $\exists!\, M \in \mathbb{C}^{n\times k}$ t.c. ...

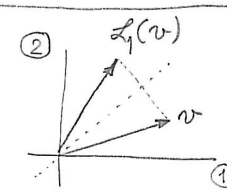
Es: 1) $\mathcal{L} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ t.c. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$
• dim che $\mathcal{L}$ è lin ("su $\mathbb{C}$")
• det $V \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ t.c. $\mathcal{L}(v) = Vv$

2) $\mathcal{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ t.c. $v \to \bar{v}$ (vett di comp i compl coniug delle comp di v)
• verif che $\mathcal{L}$ non è lineare
• Oss: $\nexists\, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ t.c. $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{L}(v) = Vv$
• Oss: $n = 2$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Vv = \mathcal{L}(v)$

ma: $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Vw \neq \mathcal{L}(w)$!

Oss: $\mathbb{R}^n$ sp vett (su $\mathbb{R}$)
• dim $\mathbb{R}^n = n$ ...
• $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ def appl lin $\mathcal{L} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(v) = Av$ ...

Es: 1) $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $\mathcal{L}_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$; • int geom :

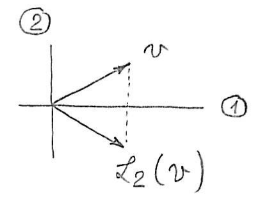


("rifless risp alla bisettrice")

• verif che è appl lin
• determ $M_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ t.c. $\mathcal{L}_1(v) = M_1 v$

2) $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $\mathcal{L}_2(v) =$ "riflesso di v risp asse orizzontale"

• determ "caratt analitica"



• verif che è lineare
• determ $M_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ t.c. $\mathcal{L}_2(v) = M_2 v$

3) $\mathcal{L}_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $\mathcal{L}_3(v) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3} v$

• decidere se $\mathcal{L}_3$ è appl lin
• determ "int geom"
• determ int geom di $\mathcal{L}_3 \circ \mathcal{L}_2$ $\left(\mathcal{L}_3 \circ \mathcal{L}_2(v) = \mathcal{L}_3(\mathcal{L}_2(v))\right)$
• determ caratt analitica di $\mathcal{L}_3 \circ \mathcal{L}_2$ e verif linearità
• determ matr M t.c. $\mathcal{L}_3 \circ \mathcal{L}_2(v) = Mv$
• verif che $M = M_3 M_2$

Oss: $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$; $\mathcal{L}_k(v) = A_k v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ le appl lin def dalle matr

• l'appl lin def da $A_1 A_2$ è $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$; l'appl def da $A_2 A_1$ è $\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1$
• se $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$ allora $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ non commutano !

Es: $R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
• $R_2 R_3 \neq R_3 R_2$ (infatti e_1 ...)
• int geom (rotazioni)