Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello del 22 luglio 2010

Problema 1

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare la forma diagonale di A e una matrice ortogonale che realizza la similitudine.

Problema 2

Sia

$$A = (1, 0, 2) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

Determinare una decomposizione ai valori singolari di A e la matrice pseudoinversa A^+.

Problema 3

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare:

(a) $\operatorname{im} A$ e $\ker A^{\mathsf{T}}$;

(b) l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 4

Sia F la forma quadratica associata alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Decidere se esistono $x, y \in \mathbb{R}^3$ tali che $F(x) > 0$ e $F(y) < 0$.

Soluzione

Problema 1

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = (1 - x)(3 - x)^2$$

dunque gli autovalori sono: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

Gli autospazi sono:

$$V(1) = \ker(A - I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rangle$$

e:

$$V(3) = \ker(A - 3I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rangle$$

La matrice, come ovvio, risulta diagonalizzabile ($\dim V(1) + \dim V(3) = 3$). *La forma diagonale* è: $\operatorname{diag}(3, 1, 3)$ e *una matrice ortogonale che realizza la similitudine* è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Problema 2

Poiché $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ le dimensioni dei fattori della decomposizione cercata sono: $U \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ e $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Si ha:

$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico:

$$p(x) = (-x)^2 (5 - x)$$

Le colonne v_1, v_2 e v_3 di un fattore V di una decomposizione ai valori singolari si ottengono scegliendo v_1 generatore di norma unitaria di $\ker(A^{\mathsf{T}} A - 5I)$ e v_2, v_3 generatori ortonormali di $\ker A^{\mathsf{T}} A$.

L'unico valore singolare è $\sqrt{5}$ e quindi:

$$\Sigma = (\sqrt{5}, 0, 0)$$

Infine, la colonna u_1 di un fattore U si ottiene ponendo:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} A v_1$$

— che risulta ovviamente 1.

La pseudoinversa A^+ si può ottenere dalla decomposizione ai valori singolari trovata, oppure direttamente dalla formula:

$$A^+ = A^\mathsf{T}(AA^\mathsf{T})^{-1} = \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Problema 3

La matrice A ha rango due e:

$$\operatorname{im} A = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Il nucleo di A^T, di dimensione uno, si determina, ad esempio, calcolando lo spazio ortogonale a $\operatorname{im} A$:

$$\ker A^\mathsf{T} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

Si constata che $b \notin \operatorname{im} A$, e poiché il nucleo di A ha dimensione zero, si deduce che l'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati ha un solo elemento. Tale elemento, detta

$$b = \beta + \nu$$

la decomposizione (ortogonale) di b con $\beta \in \operatorname{im} A$ e $\nu \in \ker A^\mathsf{T}$, è l'unica soluzione del sistema $Ax = \beta$. Si ha:

$$\beta = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e l'unica soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati è quindi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 4

Una formulazione equivalente della domanda è se F sia indefinita o no.

Per classificare la forma quadratica si osserva che la matrice A risulta congruente alla matrice $\operatorname{diag}(2, -2, 16)$ [con la sequenza di operazioni: $\hat{r}_1 = r_1 + r_3$; $\hat{c}_1 = c_1 + c_3$; $\hat{r}_2 = 2\,r_2 - r_1$, $\hat{r}_3 = 2\,r_3 - r_1$; $\hat{c}_2 = 2\,c_2 - c_1$, $\hat{c}_3 = 2\,c_3 - c_1$; $\hat{r}_3 = r_3 - 3\,r_2$; $\hat{c}_3 = c_3 - 3\,c_2$] e quindi F è indefinita. Esistono dunque elementi di $\mathbb{R}^3$ con le proprietà richieste.