Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello dell'1 luglio 2010

Problema 1

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A ed una matrice che realizza la similitudine.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare una decomposizione ai valori singolari di A.

Problema 3

Siano $U = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

e $V = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una decomposiziona ai valori singolari di $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Determinare:

(a) una base ortonormale di $\ker A$ e una di $\operatorname{im} A$;

(b) l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = u_1 - u_3$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 4

Sia

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Classificare la forma quadratica F associata ad S ed indicare x, y e z elementi non nulli di $\mathbb{R}^3$ tali che: $F(x) > 0$, $F(y) < 0$ e $F(z) = 0$.

Soluzione

Problema 1

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = (1-x)^2(2-x)$$

perciò la forma canonica di Jordan di A contiene blocchi associati all'autovalore 1 di dimensione totale due, e blocchi associati all'autovalore 2 di dimensione totale uno. Da quest'ultima informazione si deduce che la forma di Jordan contiene *un solo blocco* associato all'autovalore due: $J_1(2)$. Si ha inoltre: $\dim\ker(A-I) = 2$ e quindi i blocchi associati all'autovalore uno sono due: $J_1(1), J_1(1)$.

La forma canonica di Jordan è dunque:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1,(1), J_1(1), J_1(2)) = \mathrm{diag}(1,1,2)$$

Si osservi che A risulta diagonalizzabile.

Una matrice che realizza la similitudine si determina osservando che:

$$\ker(A-I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$$

e:

$$\ker(A-2I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

Si ottiene, ad esempio, la matrice (invertibile):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Si ha

$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico:

$$p(x) = (-x)^2\,(4-x)$$

Le colonne v_1, v_2 e v_3 di un fattore V di una decomposizione ai valori singolari si ottengono scegliendo v_1 generatore di norma unitaria di $\ker(A^\mathsf{T} A - 4I)$ e v_2, v_3 generatori ortonormali di $\ker(A^\mathsf{T} A)$. Poiché:

$$\ker(A^\mathsf{T} A - 4I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

e:

$$\ker(A^{\mathsf{T}}A) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$$

una possibile scelta per il fattore V è:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

I valori singolari sono 2, 0, 0 e quindi:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, la colonna u_1 di un fattore U si ottiene ponendo:

$$u_1 = \tfrac{1}{2} A v_1$$

e scegliendo u_2 ed u_3 di norma unitaria ed ortogonali ad u_1. Con la scelta fatta sopra di V si ottiene:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e il fattore U si completa, ad esempio, in:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Problema 3

Dalla struttura della matrice Σ si ottiene:

$$\operatorname{im} A = \langle u_1 \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker A = \langle v_2 \rangle$$

Poiché $\ker A$ ha dimensione uno, l'insieme $\mathscr{S}_{MQ}(A, u_1 - u_3)$ ha infiniti elementi. Inoltre:

$$\ker A^{\mathsf{T}} = \langle u_2, u_3 \rangle$$

perciò:

$$\mathscr{S}_{MQ}(A, u_1 - u_3) = \mathscr{S}(A, u_1)$$

Il sistema $Ax = u_1$, nel mondo delle coordinate, si traduce nel sistema:

$$\Sigma\, x' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

una cui soluzione è:

$$x' = \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tornando dalle coordinate ai vettori, si ottiene infine:

$$\mathscr{S}_{MQ}(A, u_1 - u_3) = \mathscr{S}(A, u_1) = \tfrac{1}{4}\, v_1 + \langle v_2 \rangle$$

Problema 4

Per classificare la forma quadratica si osserva che la matrice S risulta congruente alla matrice $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$ [con la sequenza di operazioni: $\hat{r}_2 = r_1 + r_2$; $\hat{c}_2 = c_1 + c_2$], e quindi F risulta indefinita.

Dalla sequenza di operazioni che una matrice diagonale congruente ad S si ottiene la matrice che realizza la congruenza:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sia G la forma quadratica associata alla matrice $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$, ovvero:

$$G(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2$$

Per determinare valori x, y e z come richiesti, si constata che:

$$G(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) > 0 \quad , \quad G(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) < 0 \quad , \quad G(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 0$$

e quindi che i valori:

$$x = C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z = C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

verificano le richieste.