Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello del 10 giugno 2010

Problema 1

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 2 & 1 & & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A ed una matrice che realizza la similitudine.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Determinare una decomposizione ai valori singolari di A.

Problema 3

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare:

(a) la matrice pseudoinversa A^+,

(b) la soluzione di norma minima del sistema $Ax = b$,

(c) l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = b$.

Problema 4

Sia

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Indicare la forma quadratica associata ad S e classificarla.

Soluzione

Problema 1

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = (2-x)(3-x)^2(-1-x)$$

perciò la forma canonica di Jordan di A contiene: blocchi associati all'autovalore 2 di dimensione totale uno, blocchi associati all'autovalore 3 di dimensione totale due e blocchi associati all'autovalore -1 di dimensione totale uno. Da queste informazioni si deduce che la forma di Jordan contiene *un solo blocco* associato all'autovalore 2, precisamente $J_1(2)$ e *un solo blocco* associato all'autovalore -1, precisamente $J_1(-1)$.

Per decidere quanti blocchi sono associati all'autovalore 3 si constata che: $\dim \mathrm{Ker}(A-3I) = 1$ e quindi c'è *un solo blocco* associato all'autovalore 3, precisamente: $J_2(3)$.

La forma canonica di Jordan è dunque:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(2), J_1(-1), J_2(3))$$

Una matrice C di colonne $c_1, \ldots, c_4$ che realizza la similitudine si determina considerando per colonne la relazione $AC = C\ \mathrm{FCJ}(A)$:

(1) $Ac_1 = 2c_1$

(2) $Ac_2 = -c_2$

(3) $Ac_3 = 3c_3$

(4) $Ac_4 = c_3 + 3c_4$

Se ne deduce che una procedura di scelta delle colonne $c_1, \ldots, c_4$ è:

- c_1 un elemento non nullo di $\mathrm{Ker}(A-2I)$
- c_2 un elemento non nullo di $\mathrm{Ker}(A+I)$

e, per quanto riguarda gli elementi c_3 e c_4 relativi al blocco associato all'autovalore 3:

- c_4 un elemento di $\mathrm{Ker}(A-3I)^2$ non appartenente a $\mathrm{Ker}(A-3I)$
- $c_3 = (A-3I)c_4$

Poiché:

$$\mathrm{Ker}(A-2I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad \mathrm{Ker}(A+I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

e

$$\mathrm{Ker}(A-3I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad \mathrm{Ker}(A-3I)^2 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

si ottiene, ad esempio, la matrice (invertibile):

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Si ha:

$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$A^\mathsf{T} A = I \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} I^\mathsf{T}$$

Una scelta possibile per il fattore $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ è dunque $V = I$.

I valori singolari di A sono $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ e quindi:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, le colonne u_1, u_2 e u_3 di un fattore $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ si ottengono ponendo:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} A v_1 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} A v_2$$

e scegliendo poi u_3 in modo che U risulti ortogonale. Una scelta possibile è:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Le righe della matrice A sono linearmente indipendenti e quindi si ha:

$$A^+ = A^\mathsf{T}(AA^\mathsf{T})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice A ha rango due, dunque: $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^2$, $b \in \operatorname{Im} A$ e l'insieme $\mathscr{S}(A, b)$ non è vuoto. L'elemento:

$$x^* = A^+ b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

è allora *la soluzione di norma minima di $Ax = b$.*

Il nucleo di A, che ha dimensione uno, risulta:

$$\operatorname{Ker} A = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

e *l'insieme delle soluzioni di* $Ax = b$, che ha infiniti elementi, *è*:

$$\mathscr{S}(A, b) = x^* + \operatorname{Ker} A$$

Problema 4

La forma quadratica associata ad S è

$$F(x) = x^{\mathsf{T}} S\, x = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 2\, x_1 x_3 + 4\, x_2 x_4$$

Per classificare la forma quadratica si osserva che la matrice S risulta congruente alla matrice $\operatorname{diag}(1, 2, 1, 0)$ [con la sequenza di operazioni: $\hat{r}_3 = r_3 - r_1$, $\hat{c}_3 = c_3 - c_1$; $\hat{r}_4 = r_4 - r_2$; $\hat{c}_4 = c_4 - c_2$], e quindi *semidefinita positiva.*