Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello del 18 febbraio 2010

Problema 1

Sia $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tale che

(a) il polinomio caratteristico di A è: $p(x) = (2-x)^4\,(i-x)$;

(b) $\dim\ker(A-2I) = 2$.

Indicare *tutte* le possibili forme canoniche di Jordan di A.

Problema 2

Sia

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare una decomposizione ai valori singolari M.

Problema 3

Siano

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare

(a) $\ker M$ e $\operatorname{im} M^{\mathsf{T}}$;

(b) la soluzione di norma minima del sistema $Mx = b$.

Problema 4

Sia

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Indicare la forma quadratica associata ad S e classificarla.

Soluzione

Problema 1

Dal polinomio caratteristico di A si deduce che la forma canonica di Jordan contiene blocchi associati a 2 e blocchi associati ad i. Inoltre: l'autovalore i risulta avere molteplicità algebrica uno, dunque ad esso è associato un solo blocco necessariamente di dimensione uno; l'autovalore 2 risulta avere molteplicità algebrica quattro, dunque la somma delle dimensioni dei blocchi ad esso è associati è quattro. Dalla seconda informazione si deduce che all'autovalore 2 sono associati due blocchi. Se ne deduce che i blocchi associati a 2 possono avere entrambi dimensione due oppure uno dimensione uno e l'altro tre.

Le possibili forme canoniche di Jordan di A sono dunque:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(i), J_2(2), J_2(2)) \quad \textit{oppure} \quad \mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(i), J_1(2), J_3(2))$$

Problema 2

Si ha

$$M^{\mathsf{T}} M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico:

$$p(x) = (-x)^2\,(6-x)$$

Le colonne v_1, v_2 e v_3 di un fattore V di una decomposizione ai valori singolari si ottengono scegliendo v_1 generatore di norma unitaria di $\ker(M^{\mathsf{T}} M - 6I)$ e v_2, v_3 generatori ortonormali di $\ker M^{\mathsf{T}} M$.

I valori singolari sono $\sqrt{6}$, 0, 0 e quindi:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, la colonna u_1 di un fattore U si ottiene ponendo:

$$u_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\, M v_1$$

e scegliendo u_2 ed u_3 di norma unitaria ed ortogonali ad u_1.

Problema 3

La matrice M ha rango uno, dunque il suo nucleo ha dimensione due e risulta:

$$\ker M = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

L'immagine di M^{T} si determina, ad esempio, calcolando lo spazio ortogonale a $\ker M$, che ha dimensione uno:

$$\mathrm{im}\, M^{\mathsf{T}} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

Si constata facilmente che $b \in \operatorname{im} M$, e dalle informazioni note sul nucleo di M si deduce che l'insieme delle soluzioni di $Mx = b$ ha infiniti elementi. Precisamente tale insieme è:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \ker M = \{ \begin{bmatrix} 1+a \\ -a \\ b \end{bmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \}$$

L'elemento di norma minima è l'unico elemento di $\mathcal{S}$ in $\operatorname{im} M^{\mathsf{T}}$, ovvero:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 4

La forma quadratica associata ad S è

$$F(x) = x^{\mathsf{T}} S\, x = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4\, x_1 x_2 + 2\, x_2 x_3$$

Per classificare la forma quadratica si osserva che la matrice S risulta congruente alla matrice $\operatorname{diag}(1, -3, 30)$ [con la sequenza di operazioni: `r2` $\leftarrow$ `r2 - 2 * r1 ; c2` $\leftarrow$ `c2 - 2 * c1 ; r3` $\leftarrow$ `3 * r3 + r2 ; c3` $\leftarrow$ `3 * c3 + c2`].