Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello del 29 gennaio 2010

Problema 1

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A e una matrice che realizza la similitudine.

Problema 2

Sia

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Determinare una decomposizione ai valori singolari di M.

Problema 3

Siano M la matrice del Problema 2 e

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare la matrice pseudoinversa di M e l'insieme delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati dell'equazione $Mx = b$.

Problema 4

Sia

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare l'inerzia di S e classificare la forma quadratica associata ad S.

Soluzione

Problema 1

Il polinomio caratteristico di A è $(-x)(x^2 - 3x) = -x^2(x-3)$ dunque A ha autovalore 0 di molteplicità algebrica 2 e autovalore 3 di molteplicità algebrica 1. Le molteplicità geometriche sono entrambe 1 (infatti $\dim \ker A = 1$). La forma canonica di Jordan è dunque costituita da un blocco associato all'autovalore 0 di dimensione 2 ed un blocco associato all'autovalore 3 di dimensione 1:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_2(0), J_1(3))$$

Una matrice $C = (c_1, c_2, c_3)$ che realizza la similitudine si può determinare leggendo per colonne l'uguaglianza $AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$. Se ne deduce che c_1 deve essere un elemento non nullo di $\ker A$, che c_2 deve essere un elemento di $\ker A^2$ non appartenente a $\ker A$ e che c_3 deve essere un elemento non nullo di $\ker(A-3I)$. Eseguendo i calcoli si ottiene, ad esempio:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Si ha:

$$M^\mathsf{T} M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$$

dunque i valori singolari di M sono $\sigma_1 = \sqrt{3}$ e $\sigma_2 = \sqrt{2}$ e quindi:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e si può scegliere $V = I$.

Le prime due colonne di U sono adesso determinate univocamente:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} M v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} M v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La terza colonna u_3 va scelta ortogonale a u_1 e u_2, ad esempio:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Problema 3

Poiché $\operatorname{rk} M = 2$ (tutti i valori singolari di M, calcolati nel problema precedente, sono non nulli), l'insieme richiesto è costituito da un solo elemento: $x^* = M^+ b$.

Dalla definizione, utilizzando la decomposizione ai valori singolari determinata nel problema precedente si ha:

$$M^+ = V\Sigma^+ U^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x^* = M^+ b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Problema 4

Utilizzando la sequenza di operazioni

```
r2 ← r2 - r1, r3 ← r3 - r1;
c2 ← c2 - c1, c3 ← c3 - c1;
r3 ← r3 - 2 * r2;
c3 ← c3 - 2 * c2
```

si deduce che la matrice S è congruente alla matrice $\operatorname{diag}(1, -1, 3)$. Dunque l'*inerzia di* S *è* $(1, 0, 2)$ e la forma quadratica associata ad S è *indefinita.*