Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello del 17 settembre 2009

Problema 1

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A e una matrice che realizza la similitudine.

Problema 2

Sia

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Determinare una decomposizione ai valori singolari di M.

Problema 3

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 4

Sia

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Indicare la forma quadratica associata ad S e classificarla.

Soluzione

Problema 1

La matrice A ha autovalore 1 di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1 (infatti $\dim\ker(A - I) = 1$), e autovalore 2 di molteplicità algebrica e geometrica 1. La forma canonica di Jordan è dunque costituita da un blocco associato all'autovalore 1 di dimensione 2 e un blocco associato all'autovalore 2 di dimensione 1:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_2(1), J_1(2))$$

Una matrice $C = (c_1, c_2, c_3)$ che realizza la similitudine si può determinare leggendo per colonne l'uguaglianza $AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$. Se ne deduce che c_2 deve essere un elemento di $\ker(A - I)^2$ non appartenente a $\ker(A - I)$, che c_1 deve essere un elemento non nullo di $\ker(A - I)$ e che c_3 deve essere un elemento non nullo di $\ker(A - 2I)$. Eseguendo i calcoli si ottiene, ad esempio:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Si ha

$$M^\mathsf{T} M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico

$$p(x) = (2 - x)(4 - x)$$

Il polinomio ha due radici distinte $(4, 2)$ perciò i gli autospazi corrispondenti hanno dimensione uno e sono mutuamente ortogonali. Le colonne v_1 e v_2 di un fattore V di una decomposizione ai valori singolari si ottengono dunque scegliendo generatori di norma unitaria rispettivemente di $\ker(M^\mathsf{T} M - 4I)$ e $\ker(M^\mathsf{T} M - 2I)$.

I valori singolari sono 2, $\sqrt{2}$ e quindi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, le colonne u_1, u_2 e u_3 di un fattore U si ottengono ponendo

$$u_1 = \frac{1}{2} M v_1 \qquad , \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} M v_2$$

e scegliendo u_3 di norma unitaria ed ortogonale ad u_1 e u_2.

Problema 3

Poiché $\ker A = \{\, 0 \,\}$, l'insieme richiesto ha un solo elemento, x^*, che si può determinare utilizzando la pseudoinversa di A. Poiché le colonne di A sono linearmente indipendenti si ha

$$A^+ = (A^\mathsf{T} A)^{-1} A^\mathsf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x^* = A^+ b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Problema 4

La forma quadratica associata ad S è

$$F(x) = x^\mathsf{T} S\, x = -x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\, x_1 x_3 - 2\, x_2 x_3$$

Per classificare la forma quadratica si osserva che la matrice S risulta congruente alla matrice $\operatorname{diag}(-1, 2, 6)$ [sequenza di operazioni: `r3` $\leftarrow$ `r3 + r1 ;` `c3` $\leftarrow$ `c3 + c1 ;` `r3` $\leftarrow$ `2 * r3 + r2 ;` `c3` $\leftarrow$ `2 * c3 + c2`], perciò l'inerzia di S è $(1, 0, 2)$ e risulta *indefinita*.