Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello del 23 luglio 2009

Problema 1

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A e una matrice che realizza la similitudine.

Problema 2

Siano

$$U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

una decomposizione ai valori singolari di $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

(a) Indicare basi ortonormali di $\ker M$ e $\operatorname{im} M$;

(b) determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Mx = u_1 + u_2$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 3

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ax = b$ e, tra esse, quella di minima norma euclidea.

Problema 4

Sia S congruente a $\operatorname{diag}(-2, 0, 1, 0)$, e sia $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ la matrice che realizza la congruenza.

(a) Determinare l'inerzia di S;

(b) indicare $v, w \in \mathbb{R}^4$ tali che $Sv \bullet v > 0$ e $Sw \bullet w < 0$

Soluzione

Problema 1

La matrice A ha autovalore 1 di molteplicità algebrica 3 e geometrica 1 (infatti $\dim\ker(A-I) = 1$). La forma canonica di Jordan è dunque costituita da un solo blocco associato all'autovalore 1, di dimensione 3:

$$\mathrm{FCJ}(A) = J_3(1)$$

Una matrice $C = (c_1, c_2, c_3)$ che realizza la similitudine si può determinare leggendo per colonne l'uguaglianza $AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$. Se ne deduce che c_3 deve essere un elemento di $\ker(A-I)^3$ non appartenente a $\ker(A-I)^2$, che c_2 deve essere un elemento di $\ker(A-I)^2$ non appartenente a $\ker(A-I)$ e che c_1 deve essere un elemento non nullo di $\ker(A-I)$. Eseguendo i calcoli si ottiene, ad esempio:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Guardando le coordinate rispetto alle basi ortonormali u_1, u_2 di $\mathbb{R}^2$ e v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ si ottiene

$$\ker\Sigma = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad \mathrm{im}\,\Sigma = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

e quindi

$$\ker M = \langle v_2, v_3 \rangle \qquad , \qquad \mathrm{im}\,M = \langle u_1 \rangle$$

L'insieme delle soluzioni di $Mx = u_1 + u_2$ nel senso dei minimi quadrati è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Mx = u_1$ (infatti u_1 è l'addendo di $u_1 + u_2$ in $\mathrm{im}\,M$). Dalla prima colonna dell'uguaglianza $MV = U\Sigma$ si deduce che l'insieme richiesto è:

$$\frac{1}{2}\,v_1 + \ker M = \frac{1}{2}\,v_1 + \langle v_2, v_3 \rangle$$

Problema 3

Poiché $\mathrm{im}\,A = \mathbb{R}^2$, l'insieme richiesto non è vuoto e, detta x^* la soluzione di minima norma euclidea, tale insieme è:

$$x^* + \ker A$$

La soluzione di minima norma euclidea si può determinare utilizzando la pseudoinversa di A. Poiché le righe di A sono linearmente indipendenti si ha

$$A^+ = A^\mathsf{T}(AA^\mathsf{T})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x^* = A^+ b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Esplicitando $\ker A$ si ottiene infine l'insieme richiesto:

$$x^* + \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

Problema 4

L'inerzia è invariante per congruenza (Teorema di Sylvester), perciò l'inerzia di S è $(1, 2, 1)$.

In termini di coordinate rispetto alla base c_1, c_2, c_3, c_4 la forma quadratica associata ad S ha espressione

$$F(x) = x^{\mathsf{T}} \operatorname{diag}(-2, 0, 1, 0)\, x = -2\, x_1^2 + x_3^2$$

Se ne deduce che, posto

$$v' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad w' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ha $F(v') = 1$ e $F(w') = -2$. Una possibile scelta dei vettori richiesti è quindi

$$v = c_3 \quad , \quad w = c_1$$