Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello del 2 luglio 2009

Problema 1

Sia $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tale che

(a) il polinomio caratteristico di A è: $p_A(x) = (1-x)^2\,(i-x)^2\,;$

(b) $\dim\ker(A-I) = 2\,;$

(c) $\dim\ker(A-iI) = 1\,.$

Indicare *tutte* le possibili forme canoniche di Jordan di A.

Problema 2

Sia

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Determinare la matrice pseudoinversa di M.

Problema 3

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare

(a) $\operatorname{im} A$ e $\ker A^{\mathsf{T}}$;

(b) l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 4

Sia

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Indicare la forma quadratica associata ad S e classificarla.

Soluzione

Problema 1

La matrice A ha autovalore 1 di molteplicità algebrica 2 e geometrica 2, e autovalore i di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1. Dunque la forma canonica di Jordan ha 2 blocchi associati a 1 entrambi di dimensione uno ed un blocco associato a i di dimensione due.

A parte permutazioni dei blocchi si ha allora: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(1), J_1(1), J_2(i))$.

Problema 2

Sia le righe che le colonne di M sono linearmente dipendenti, dunque per determinare la pseudoinversa occorre una decomposizione ai valori singolari.

Si ha

$$M^\mathsf{T} M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico

$$p(x) = (-x)^2\,(4-x)$$

Le colonne v_1, v_2 e v_3 di un fattore V di una decomposizione ai valori singolari si ottengono scegliendo v_1 generatore di norma unitaria di $\ker(M^\mathsf{T} M - 4I)$ e v_2, v_3 generatori ortonormali di $\ker M^\mathsf{T} M$.

I valori singolari sono 2, 0 e quindi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, le colonne u_1 e u_2 di un fattore U si ottengono ponendo

$$u_1 = \frac{1}{2}\,M v_1$$

e scegliendo u_2 di norma unitaria ed ortogonale ad u_1.

La pseudoinversa risulta quindi:

$$M^+ = V\,\Sigma^+\,U^\mathsf{T} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

L'immagine di A è

$$\mathrm{im}\,A = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

ed il nucleo di A^T si determina calcolando lo spazio ortogonale a $\mathrm{im}\,A$:

$$\ker A^\mathsf{T} = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

L'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ax = c$ dove c è l'addendo di b in $\operatorname{im} A$. Risulta

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi l'insieme richiesto è:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \ker A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \rangle$$

Problema 4

La forma quadratica associata ad S è

$$F(x) = x^{\mathsf{T}} S\, x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\, x_1 x_4 + 2\, x_2 x_3$$

Per classificare la forma quadratica si osserva che

$$F(x) = (x_1 + x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2$$

dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}^4$ si ha $F(x) \geqslant 0$, ovvero la forma quadratica (e quindi S) è *semidefinita positiva.* Alternativamente, si osserva che la matrice S risulta congruente alla matrice $\operatorname{diag}(1, 1, 0, 0)$ [sequenza di operazioni: `r4` $\leftarrow$ `r4 - r1 ;` `c4` $\leftarrow$ `c4 - c1 ;` `r3` $\leftarrow$ `r3 - r2 ;` `c3` $\leftarrow$ `c3 - c2`].