Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Algebra Lineare e Fondamenti di Geometria

Modulo di Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

Appello del 16 giugno 2009

Problema 1

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A e una matrice che realizza la similitudine.

Problema 2

Sia

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare una decomposizione ai valori singolari di M.

Problema 3

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare

(a) la matrice pseudoinversa di A;

(b) l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ax = b$;

(c) l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 4

Sia

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Classificare la forma quadratica associata ad S;

(b) determinare l'inerzia di S.

Soluzione

Problema 1

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = (-x)^2\,(3-x)$$

e $\dim\ker A = 2$. Dunque la forma canonica di Jordan di A è:

$$\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(0,0,3)$$

Una matrice $C = (c_1, c_2, c_3)$ che realizza la similitudine si può determinare leggendo per colonne l'uguaglianza $AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$. Se ne deduce che c_1 e c_2 devono essere elementi indipendenti di $\ker A$ e c_3 deve essere un elemento non nullo di $\ker(A-3I)$. Eseguendo i calcoli si ottiene, ad esempio:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Si ha

$$M^{\mathsf{T}}M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico

$$p(x) = (-x)(2-x)(4-x)$$

Il polinomio ha tre radici distinte $(4,2,0)$ perciò i tre autospazi corrispondenti hanno dimensione uno e sono mutuamente ortogonali. Le colonne v_1, v_2 e v_3 di un fattore V di una decomposizione ai valori singolari si ottengono dunque scegliendo generatori di norma unitaria rispettivamente di $\ker(M^{\mathsf{T}}M - 4I)$, $\ker(M^{\mathsf{T}}M - 2I)$ e $\ker M^{\mathsf{T}}M$.

I valori singolari sono 2, $\sqrt{2}$, 0 e quindi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, le colonne u_1, u_2 e u_3 di un fattore U si ottengono ponendo

$$u_1 = \frac{1}{2}\,Mv_1 \qquad , \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,Mv_2$$

e scegliendo u_3 di norma unitaria ed ortogonale ad u_1 e u_2.

Problema 3

Le colonne di A sono linearmente indipendenti, perciò

$$A^+ = (A^\mathsf{T} A)^{-1} A^\mathsf{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $b \notin \operatorname{im} A$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ax = b$ è *vuoto*.
Infine, $\ker A = \{\, 0 \,\}$ e la colonna

$$x^* = A^+ b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è l'*unica* soluzione dell'equazione $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 4

La matrice S risulta congruente alla matrice $\operatorname{diag}(1, -1, 0)$ [sequenza di operazioni: `r2 ← r2 - r1 & r3 ← r3 - r1 ; c2 ← c2 - c1 & c3 ← c3 - c1 ; r3 ← r3 + r2 ; c3 ← c3 + c2`] perciò S risulta *indefinita* e la sua inerzia è $(1, 1, 1)$.