

(0.01) Esempio.

I moti di un oscillatore armonico smorzato sono descritti dall'*equazione differenziale*:

$$(*) \quad x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$$

in cui l'incognita è la *funzione* a valori reali $x(t)$. Questa è un'equazione differenziale del *secondo ordine* (lineare, a coefficienti costanti, omogenea). Una *soluzione* dell'equazione è una funzione $y(t)$ a valori reali *con derivata seconda* che soddisfa l'uguaglianza $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$ per *ogni* t in \mathbb{R} . L'equazione differenziale determina *tutti* i possibili moti dell'oscillatore (l'equazione (*) ha *infinite* soluzioni). Ciascuno dei moti è individuato dalle *condizioni iniziali*:

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad x'(t_0) = v_0$$

Si chiama *Problema di Cauchy* quello di *determinare le soluzioni dell'equazione differenziale che soddisfano le condizioni iniziali*.

L'equazione differenziale del secondo ordine (*) è *equivalente* ad un *sistema di due equazioni del primo ordine*. Se $y(t)$ è soluzione dell'equazione (*) allora, posto:

$$x_1(t) = y(t) \quad , \quad x_2(t) = y'(t)$$

si ha:

$$(**) \quad x_1'(t) = x_2(t) \quad , \quad x_2'(t) = -a x_2(t) - b x_1(t)$$

dunque la colonna $\text{col}(x_1(t), x_2(t))$ è soluzione del sistema (**). Viceversa: se $\text{col}(y_1(t), y_2(t))$ è una soluzione del sistema (**), allora, posto $y(t) = y_1(t)$ si ha: $y'(t) = y_1'(t) = y_2(t)$ e $y''(t) = y_1''(t) = y_2'(t) = -a y_2(t) - b y_1(t)$ ovvero:

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$$

cioè $y(t)$ è soluzione dell'equazione (*).

(0.02) Osservazione.

Le procedure che descriveremo sono pensate per approssimare *la* soluzione del Problema di Cauchy:

$$(\$) \quad x'(t) = F(t, x(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

per t in un intervallo *limitato* $[t_0, t_f]$. L'*incognita* del problema è la funzione $x(t)$ a valori in \mathbb{R}^n ; i *dati* sono: *la funzione* F definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valori in \mathbb{R}^n , *gli istanti* t_0 e $t_f > t_0$ e *la colonna* x_0 in \mathbb{R}^n .

L'asserto precedente presuppone che per il problema (§) si abbia *esistenza ed unicità* della soluzione. Vedremo poi che anche per *descrivere le procedure* sarà necessario fare un'*ipotesi* ulteriore.

(0.03) Ipotesi (di esistenza ed unicità).

Per ogni \underline{t} in \mathbb{R} e \underline{x} in $\mathbb{R}(n)$ esiste una sola soluzione dell'equazione differenziale:

$$\underline{x}'(t) = F(t, \underline{x}(t))$$

che verifica la condizione iniziale:

$$\underline{x}(\underline{t}) = \underline{x}$$

Indicheremo tale soluzione con $y(t; \underline{x}, \underline{t})$.

(0.04) Definizione (metodo numerico per l'approssimazione ...).

Un *metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del Problema di Cauchy* (§) su $[t_0, t_f]$ è una procedura che costruisce, in base al valore di un parametro E controllato dall'utilizzatore, numeri reali $t(0) = t_0, \dots, t(N)$ in $[t_0, t_f]$, colonne $x(0) = x_0, \dots, x(N)$ in $\mathbb{R}(n)$ e, per $k = 0, \dots, N$, suggerisce di utilizzare $x(k)$ come approssimazione di $y(t(k); x_0, t_0)$.

I numeri $t(0), \dots, t(N)$ si chiamano *istanti di integrazione* e, per $k = 0, \dots, N-1$, il numero $h(k) = t(k+1) - t(k)$ si chiama *passo di integrazione all'istante $t(k)$* .

Una realizzazione in *Scilab* di un metodo numerico ha la struttura seguente:

```
function [T,X] = MetodoNumerico(x0,t0,tf,F,E)

k = 0; t(0) = t0; x(0) = x0;
while t(k) < tf,
    SCEGLI h(k) in base al valore di E;
    CALCOLA x(k+1);
    t(k+1) = t(k) + h(k);
    k = k+1;
end;

endfunction
```

Le variabili di uscita sono, rispettivamente, la riga T e la matrice X tali che:

$$T = (t(0), \dots, t(N)) \quad , \quad X = (x(0), \dots, x(N))$$

Un metodo numerico è specificato dalle procedure di *scelta* di $h(k)$ e *calcolo* di $x(k+1)$.

(0.05) Definizione (errore totale).

Siano $t(k)$ un istante di integrazione e $x(k)$ la corrispondente approssimazione generati da un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema (§). La colonna:

$$et(k) = x(k) - y(t(k); x_0, t_0) \text{ in } R(n)$$

si chiama *errore totale all'istante* $t(k)$. La norma di $et(k)$, che si indica con $ET(k)$, è una misura di quanto il metodo sbaglia, all'istante $t(k)$, nel seguire la soluzione del problema (§).

(0.06) Definizione (metodo convergente per $E \rightarrow 0$).

Un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema (§) è *convergente per* $E \rightarrow 0$ se: per ogni $t_f > t_0$ e ogni $\Delta > 0$ esiste E^* tale che se $E < E^*$ allora per gli istanti $t(0) = t_0, \dots, t(N)$ e le colonne $x(0) = x_0, \dots, x(N)$ determinati dal metodo si ha:

$$t(N) = t_f \quad \text{e} \quad \max \{ ET(0), \dots, ET(N) \} < \Delta$$

(0.07) Definizione (errore locale).

Siano $t(k-1)$ e $t(k)$ due istanti di integrazione consecutivi e $x(k-1)$, $x(k)$ le corrispondenti approssimazioni generati da un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema (§). La colonna:

$$el(k) = x(k) - y(t(k); x(k-1), t(k-1)) \text{ in } R(n)$$

si chiama *errore locale all'istante* $t(k)$. La norma di $el(k)$, che si indica con $EL(k)$, è una misura di quanto il metodo sbaglia, all'istante $t(k)$, nel seguire la soluzione dell'equazione differenziale $x'(t) = F(t, x(t))$ che all'istante $t(k-1)$ passa per $x(k-1)$.

(0.08) Osservazione (relazione tra errore locale e totale).

Si ha:

$$et(k) = x(k) - y(t(k); x_0, t_0) = (x(k) - y(t(k); x(k-1), t(k-1))) + \\ + (y(t(k); x(k-1), t(k-1)) - y(t(k); x_0, t_0))$$

da cui:

$$et(k) = el(k) + (y(t(k); x(k-1), t(k-1)) - y(t(k); x_0, t_0))$$

Introducendo la notazione:

$$\Delta y(t''; s, t') = y(t''; y(t'; x_0, t_0) + s, t') - y(t''; y(t'; x_0, t_0), t')$$

si riscrive, infine:

$$et(k) = el(k) + \Delta y(t(k); et(k-1), t(k-1))$$

La quantità $\Delta y(t''; s, t')$ descrive come l'equazione differenziale tramanda all'istante t'' lo scostamento s , all'istante t' , dalla soluzione $y(t; x_0, t_0)$ del problema (§).

* Metodo TS(1) - Eulero esplicito *

(1.01) Ipotesi (regolarità delle soluzioni).

Supponiamo che *tutte* le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = F(t, x(t))$ abbiano *derivata seconda continua*.

La richiesta è certamente soddisfatta se *tutte* le derivate parziali prime della funzione $F(t, x)$ *esistono* e sono funzioni *continue* di t ed x .

(Infatti: se $y(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale si ha:

$$y''(t) = (y'(t))' = (F(t, y(t)))' = \frac{\partial}{\partial t} F(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial x} F(t, y(t)) \cdot y'(t)$$

che risulta continua perché lo sono $\frac{\partial}{\partial t} F(t, x)$, $\frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$, $y(t)$ e $y'(t)$.)

(1.02) Definizione (metodo TS(1) - Eulero esplicito).

Il *metodo TS(1)* (o *metodo di Eulero esplicito*) è definito dalle procedure seguenti.

- SCELTA di $h(k)$. Dati $E > 0$ e $\lambda > 0$, per ogni k si pone:

$$d(k) = \max \{ \lambda, \|y''(t(k); x(k), t(k))\| \}$$

e poi:

$$h(k) = \min \left\{ \sqrt{\frac{2E}{d(k)}}, t_f - t(k) \right\}$$

- CALCOLO di $x(k+1)$. Dopo aver scelto $h(k)$ si pone:

$$x(k+1) = x(k) + F(t(k), x(k)) h(k)$$

Il nome del metodo è conseguenza del fatto che la funzione $x(k) + F(t(k), x(k)) h$ si ottiene troncando al termine di ordine *uno* la *serie di Taylor* di $y(t(k) + h; x(k), t(k))$ in $h = 0$.

(1.03) Osservazione (sulla scelta di $h(k)$).

Indicando con $y(t)$ la soluzione $y(t; x(k), t(k))$ dell'equazione differenziale, sia s la funzione da \mathbb{R} in $\mathbb{R}(n)$ definita da:

$$s(h) = x(k) + F(t(k), x(k)) h - y(t(k) + h)$$

Detto G il grafico di $y(t)$, il valore $s(h)$ rappresenta lo *scostamento* tra G e la retta tangente a G in $(t(k), x(k))$, misurato all'istante $t(k) + h$. Per $h > 0$ la quantità $s(h)$ è l'errore locale all'istante $t(k) + h$.

Poiché $y(t)$ ha derivata seconda continua anche $s(h)$ ha derivata seconda continua. Per la Formula di Taylor in $h = 0$ con resto di Lagrange, esiste una funzione z da \mathbb{R} in $\mathbb{R}(n)$ tale che:

$$s(h) = s(0) + s'(0) h + \frac{1}{2} s''(0) h^2 + z(h) h^2 \quad \text{e} \quad z(h) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

e quindi, essendo $s(0) = x(k) - y(t(k)) = 0$, $s'(0) = F(t(k), x(k)) - y'(t(k)) = 0$ e $s''(0) = -y''(t(k))$:

$$s(h) = -\frac{1}{2} y''(t(k)) h^2 + z(h) h^2 \quad \text{con} \quad z(h) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

Se $y''(t(k))$ non è zero allora:

- Per h piccolo: $-\frac{1}{2} y''(t(k)) h^2$ è una buona stima di $s(h)$

(nel senso che l'errore relativo tende a zero per $h \rightarrow 0$)

- Si ha:

$$\left| -\frac{1}{2} y''(t(k)) h^2 \right| = E \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{2E}{\left| y''(t(k)) \right|}}$$

La scelta di $h(k)$ garantisce che, in ogni caso e per ogni $\lambda > 0$, si ha:

$$\left| -\frac{1}{2} y''(t(k)) h(k)^2 \right| \leq E$$

Il parametro λ ha lo scopo di evitare che possa essere $d(k) = 0$ e garantisce, inoltre, che:

$$\text{per ogni } k: d(k) \geq \lambda \quad \text{e quindi} \quad h(k) \leq \sqrt{\frac{2E}{\lambda}}$$

(1.04) Teorema (convergenza del metodo TS(1), 1).

Siano t_0 un numero reale, F una funzione definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}(n)$ a valori in $\mathbb{R}(n)$ e x_0 in $\mathbb{R}(n)$.

Se:

- Tutte le derivate parziali prime di $F(t, x)$ sono funzioni continue di t ed x , esiste un numero reale L tale che $F(t, x)$ è L -lipschitziana rispetto ad x e la funzione $F(t, 0)$ è limitata su \mathbb{R} ;

- Esiste un numero reale C tale che per la funzione:

$$G_2(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) \cdot F(t, x)$$

si ha, per ogni (t,x) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$: $\| G_2(t,x) \| \leq C''$

allora: per ogni $t_f > t_0$ e $\lambda > 0$, il metodo TS(1) applicato al Problema di Cauchy:

$$(\S) \quad x'(t) = F(t, x(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

è convergente per $E \rightarrow 0$.

(1.05) Osservazione (sulle condizioni (a) e (b)).

Si ricordi che la funzione $F(t,x)$ è L-lipschitziana rispetto ad x se: esiste un numero reale L tale che per ogni t e per ogni x', x'' si ha

$$\| F(t,x') - F(t,x'') \| \leq L \| x' - x'' \|$$

La condizione (a) è *sufficiente* per il sussistere delle Ipotesi (0.03) e (1.01).

Per ogni soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale $x'(t) = F(t, x(t))$ si ha:

$$y''(t) = G_2(t, y(t))$$

e la condizione (b) garantisce che:

$$\text{per ogni } t \text{ in } \mathbb{R}: \quad \| y''(t) \| \leq C''$$

(1.06) Dimostrazione (del Teorema (1.04)).

Sia $t_f > t_0$.

- Parte 1: Il metodo raggiunge t_f .

Dall'ipotesi (b), per ogni k si ha:

$$d(k) = \max \{ \lambda, \| y''(t(k); x(k), t(k)) \| \} \leq \max \{ \lambda, C'' \} = M$$

da cui:

$$\sqrt{\frac{2E}{d(k)}} \geq \sqrt{\frac{2E}{M}} = h_{\min}$$

Dunque, indicando con $\text{int}(x)$ la *parte intera superiore* di x (ovvero il più piccolo numero intero non inferiore ad x), la procedura termina in *al più*:

$$\text{int}\left(\frac{t_f - t_0}{h_{\min}}\right) = \text{int}\left((t_f - t_0) \sqrt{\frac{M}{2E}}\right) = N_{\max}$$

passi con $t(N) = t_f$.

- Parte 2: Stima dell'errore totale.

All'istante t_0 si ha:

$$et(0) = 0 \Rightarrow ET(0) = 0$$

All'istante $t(1)$:

$$et(1) = el(1) \Rightarrow ET(1) = EL(1)$$

Per gli istanti successivi, utilizzando la relazione tra errore totale e locale mostrata nell'Osservazione (0.08), si ha:

$$et(k) = el(k) + \Delta y(t(k); et(k-1), t(k-1)) \Rightarrow$$

$$ET(k) \leq EL(k) + \|\Delta y(t(k); et(k-1), t(k-1))\|$$

La condizione (a) garantisce che per ogni $t' < t''$ in R e s in $R(n)$:

$$\|\Delta y(t''; s, t')\| \leq e^{L(t'' - t')} \|s\|$$

quindi si ottiene:

$$ET(k) \leq EL(k) + e^{L h(k-1)} ET(k-1)$$

All'istante $t(2)$ si ha allora:

$$ET(2) \leq EL(2) + e^{L h(1)} ET(1) = EL(2) + e^{L h(1)} EL(1)$$

Analogamente, all'istante $t(3)$:

$$\begin{aligned} ET(3) &\leq EL(3) + e^{L h(2)} ET(2) \\ &\leq EL(3) + e^{L h(2)} EL(2) + e^{L(h(2) + h(1))} EL(1) \end{aligned}$$

Infine, all'istante $t(k)$:

$$ET(k) \leq EL(k) + e^{L h(k-1)} EL(k-1) + \dots + e^{L(h(k-1) + \dots + h(1))} EL(1)$$

Dall'ipotesi (b) del Teorema, per $j = 1, \dots, N$ si deduce (utilizzando l'espressione di $el(j)$ che si ottiene ragionando come nell'Osservazione (1.03) ma adottando la *forma integrale* del resto nella Formula di Taylor):

$$EL(j) \leq \frac{1}{2} C'' h(j-1)^2$$

da cui, posto $h_{\max} = \max \{ h(1), \dots, h(N-1) \}$:

$$EL(j) \leq \frac{1}{2} C'' h_{\max} h(j-1)$$

Si ottiene allora, per l'errore totale all'istante $t(k)$:

$$ET(k) \leq \frac{1}{2} C'' \text{hmax} (h(k-1) + h(k-2) e^{L h(k-1)} + \dots \\ + h(0) e^{L (h(k-1) + \dots + h(1))})$$

Con opportune maggiorazioni si ricava:

$$h(k-1) + \dots + h(0) e^{L (h(k-1) + \dots + h(1))} \leq \frac{e^{L (t(k) - t_0)} - 1}{L}$$

Infine:

$$ET(k) \leq \frac{1}{2} C'' \text{hmax} \frac{e^{L (t(k) - t_0)} - 1}{L} \leq \frac{1}{2} C'' \text{hmax} \frac{e^{L (t_f - t_0)} - 1}{L}$$

e, utilizzando la disuguaglianza finale dell'Osservazione (1.03):

$$ET(k) \leq \frac{1}{2} C'' \sqrt{\frac{2E}{\lambda}} \frac{e^{L (t_f - t_0)} - 1}{L}$$

(1.07) Osservazione.

La convergenza del metodo TS(1) si ottiene considerando che:

$$E \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{2} C'' \sqrt{\frac{2E}{\lambda}} \frac{e^{L (t_f - t_0)} - 1}{L} \rightarrow 0$$

Per $E \rightarrow 0$ è ragionevole aspettarsi, più precisamente, che:

- N tende a infinito come $1 / \sqrt{E}$;

(Infatti:

$$\text{int} ((t_f - t_0) \sqrt{\frac{\lambda}{2E}}) = N_{\min} \leq N \leq N_{\max}$$

e sia N_{\min} che N_{\max} tendono a infinito come $1 / \sqrt{E}$.)

- Per ogni k : $ET(k)$ tende a zero come \sqrt{E} .

(1.08) Esempio.

(1) Consideriamo l'equazione differenziale:

$$x'(t) = \text{sen}(x(t))$$

In questo caso $F(t,x) = \text{sen}(x)$ e le condizioni (a) e (b) sono soddisfatte:

- Tutte le derivate parziali prime di $F(t,x)$ esistono e sono funzioni continue di t ed x ;
- La funzione $F(t,x)$ è lipschitziana di costante $L = 1$ rispetto ad x ;
(Infatti: Per ogni x', x'' in \mathbb{R} esiste z tra x' ed x'' tale che (Teorema di Lagrange):

$$| F(t,x') - F(t,x'') | = | \sin(x') - \sin(x'') | = | \cos(z) | |x' - x''|$$

da cui: $| F(t,x') - F(t,x'') | \leq |x' - x''|$.)

- La funzione $F(t,0) = \sin(0)$ è limitata su \mathbb{R} ;
- Si ha:

$$G_2(t,x) = \cos(x) \sin(x) \Rightarrow \text{per ogni } (t,x): | G_2(t,x) | \leq 1$$

Il Teorema di convergenza (1.04) è utilizzabile.

(2) Consideriamo l'equazione differenziale:

$$x'(t) = x(t)$$

In questo caso $F(t,x) = x$, la condizione (a) è soddisfatta:

- Tutte le derivate parziali prime di $F(t,x)$ esistono e sono funzioni continue di t ed x ;
- La funzione $F(t,x)$ è lipschitziana di costante $L = 1$ rispetto ad x ;

(Infatti: Per ogni x', x'' in \mathbb{R} : $| F(t,x') - F(t,x'') | = | x' - x'' |$.)

- La funzione $F(t,0) = 0$ è limitata su \mathbb{R} ;

ma la condizione (b) non lo è:

- $G_2(t,x) = x$ non è limitata su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Il Teorema di convergenza (1.04) non è utilizzabile.

(1.09) Teorema (convergenza del metodo TS(1), 2).

Siano t_0 un numero reale, F una funzione definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valori in \mathbb{R}^n e x_0 in \mathbb{R}^n e si consideri il Problema di Cauchy:

$$(\S) \quad x'(t) = F(t, x(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

Se tutte le derivate parziali prime di $F(t,x)$ sono funzioni continue di t ed x e il Problema (§) ha una sola soluzione, allora per ogni $t_f > t_0$ e $\lambda > 0$ il metodo TS(1) applicato al Problema (§) è convergente per $E \rightarrow 0$ e:

- N tende a infinito come $1 / \sqrt{E}$;
- Per ogni k : $ET(k)$ tende a zero come \sqrt{E} .

(1.10) Realizzazione in Scilab (TS_1_pv).

```

function [T, X, PASSO] = TS_1_pv(x0, t0, tf, F, G2, E, LAMBDA, HMIN)
//
// Integra numericamente, sull'intervallo [t0,tf], il Problema
// di Cauchy in R(n):
//
// x' = F(t,x)
// x(t0) = x0
//
// con il metodo TS(1) - Eulero esplicito - a passo variabile.
//
// x0: condizione iniziale (colonna di n elementi)
// t0: istante iniziale (numero reale)
// tf: istante finale (numero reale)
// F: function che definisce l'equazione differenziale; F(t,x) deve
//     essere una colonna di n numeri reali
// G2: function che restituisce la derivata seconda in t della soluzione
//     dell'equazione differenziale che all'istante t assume valore x;
//     G2(t,x) deve essere una colonna di n numeri reali
// E: valore massimo della stima dell'errore locale (numero reale)
// LAMBDA: numero reale che stabilisce il valore massimo del passo
//         (OPZIONALE - valore predefinito: 1d-5)
// HMIN: valore minimo consentito del passo
//         (OPZIONALE - valore predefinito: (tf - t0) / 1d6)
//
// T = [t(0),...,t(N)]: riga contenente gli istanti di integrazione
// X = [x(0),...,x(N)]: matrice n x (N+1) contenente le approssimazioni
// PASSO = [h(0),...,h(N-1)]: riga contenente i passi di integrazione
//
// Valore degli argomenti opzionali
//
if ~exists('LAMBDA','1') then LAMBDA = 1d-5; end;
if ~exists('HMIN','1') then HMIN = (tf - t0) / 1d6; end;
//
// Inizializzazione delle variabili di uscita
//
T(1,1) = t0;
X(:,1) = x0;
PASSO = [];
//
// ciclo principale
//
while (T(1,$) < tf), // arresta la costruzione se ha raggiunto tf
//
// scelta del passo
//
Nd2x = norm(G2(T(1,$),X(:,,$)));
d = max(LAMBDA, Nd2x);
PASSO(1,$+1) = min(sqrt(2*E/d), tf - T(1,$));

```

```

//
// calcolo approssimazione e nuovo istante di integrazione
//
X(:, $+1) = X(:, $) + F(T(1, $), X(:, $)) * PASSO(1, $);
T(1, $+1) = T(1, $) + PASSO(1, $);
//
// arresta la costruzione se il passo calcolato risulta troppo
// piccolo e non ha raggiunto tf
//
if (PASSO(1, $) < HMIN) & (T(1, $) < tf) then break; end;
//
end;
//
// Verifica se l'integrazione ha raggiunto tf
//
if T(1, $) < tf then
    printf("\n\nIntegrazione interrotta a T = %3.2e", T(1, $));
end;
//
endfunction
//

```

(1.11) Esempio.

Si consideri un pendolo realizzato da un punto pesante di massa m collegato da un filo inestensibile di lunghezza L ad un punto fisso. Supposto piano il moto del punto ed adottato l'angolo x tra la verticale discendente ed il filo, misurato in senso antiorario, come coordinata lagrangiana, l'equazione del moto risulta:

$$(ED) \quad x''(t) = -p^2 \sin x(t) \quad , \quad p = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Per approssimare nell'intervallo $[0,3]$ la soluzione del Problema di Cauchy che si ottiene considerando le condizioni iniziali:

$$(CI) \quad x(0) = x_0 \quad , \quad x'(0) = 0$$

si utilizza, in Scilab, la procedura TS_1_pv. L'uso della procedura richiede:

- La determinazione di un sistema di due equazioni differenziali di ordine uno equivalente all'equazione (ED). Introdotta le variabili $u_1(t) = x(t)$, $u_2(t) = x'(t)$ si ottiene:

$$(ED') \quad u_1'(t) = u_2(t) \quad , \quad u_2'(t) = -p^2 \sin u_1(t)$$

che si completa con le condizioni iniziali:

$$(CI') \quad u_1(0) = x_0 \quad , \quad u_2(0) = 0$$

- La scrittura della function che definisce il sistema (ED'):

```
function y = F(t,u)

    y = [          u(2);
         - p^2 * sin( u(1) ) ];

endfunction
```

- La determinazione della funzione che, dati t ed u , restituisce il valore della derivata seconda, calcolata in t , della soluzione del sistema (ED') che passa per u all'istante t :

$$u''(t) = \begin{bmatrix} u_2'(t) \\ -p^2 u_1'(t) \cos(u_1(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p^2 \sin(u_1(t)) \\ -p^2 u_2(t) \cos(u_1(t)) \end{bmatrix}$$

e la scrittura della relativa function:

```
function y = G2(t,u)

    y = [          - p^2 * sin( u(1) );
         - p^2 * u(2) * cos( u(1) ) ];

endfunction
```

- L'assegnamento dell'istante finale t_f :

```
tf = 3;
```

- L'assegnamento della colonna delle condizioni iniziali (CI):

```
u0 = [x0;0];
```

- La scelta del valore massimo consentito per la stima dell'errore locale, E .

Se x_0 è piccolo, la scelta può ragionevolmente essere fatta in base ai seguenti passi:

(a) Si considera l'equazione linearizzata di (ED):

$$(ED \text{ LIN}) \quad x''(t) = -p^2 x(t)$$

ed il Problema di Cauchy ottenuto aggiungendo le condizioni iniziali (CI). Questo problema ha soluzione calcolabile:

$$y(t) = x_0 \cos(p t)$$

(b) Si utilizza la procedura TS_1_pv per approssimare $y(t)$ su $[0,3]$ scegliendo *sperimentalmente* il valore di E in modo da ottenere un errore totale massimo sufficientemente piccolo (questo è possibile perché l'errore totale è calcolabile, essendo nota $y(t)$, e perché il metodo TS(1), applicato al Problema di Cauchy

(ED LIN), (CI) è convergente).

(c) Essendo x_0 piccolo, la soluzione del Problema di Cauchy (ED LIN), (CI) è vicina a quella del problema (ED), (CI) (infatti, il primo si ottiene linearizzando il secondo intorno alla configurazione di equilibrio stabile $x(t) = 0$). Dunque è ragionevole aspettarsi che il valore di E determinato in (b) si adegua anche per il problema non lineare (ED), (CI).

Posto: $x_0 = \pi/8$ rad, $g = 9,81$ m/s² e $L = 1$ m si ottengono i risultati seguenti.

- Problema linearizzato (ED LIN), (CI):

E	$ET_{\max} = \max(ET_k)$	N	M
10^{-3}	$2,6 \cdot 10^{-1}$	205	26%
10^{-5}	$2,5 \cdot 10^{-2}$	1939	2%
10^{-7}	$2,5 \cdot 10^{-3}$	19284	0,2%

Valutiamo l'errore commesso approssimando $\text{col}(y(t(k)), y'(t(k)))$ con $U(:, k+1)$ usando il massimo errore relativo:

$$M = \max_k \frac{ET(k)}{\| \text{col}(y(t(k)), y'(t(k))) \|}$$

L'unico valore di E che garantisce un errore relativo inferiore a 1% è l'ultimo. Poniamo dunque, per il caso non lineare:

$$E = 10^{-7};$$

- Problema non lineare (ED), (CI):

E	N
10^{-3}	266
10^{-5}	2586
10^{-7}	25778

Riportiamo i grafici ottenuti per $E = 10^{-7}$. In Figura 1, 2 e 3 si confronta l'approssimazione numerica ottenuta $U(:, k)$ con la soluzione del problema linearizzato (nota). In teoria, quest'ultima soluzione è tanto più vicina alla soluzione del problema non lineare (non nota) quanto più è piccolo x_0 .

In Figura 1 e 2 sono riportati, rispettivamente, i grafici delle due componenti della soluzione del problema linearizzato e dell'approssimazione numerica della soluzione del problema non lineare.

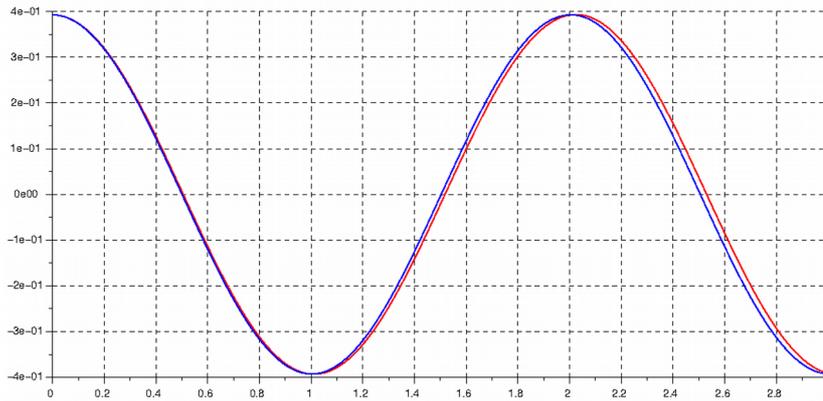


Figura 1. In blu: $y(t)$, in rosso: $U(1,:)$.

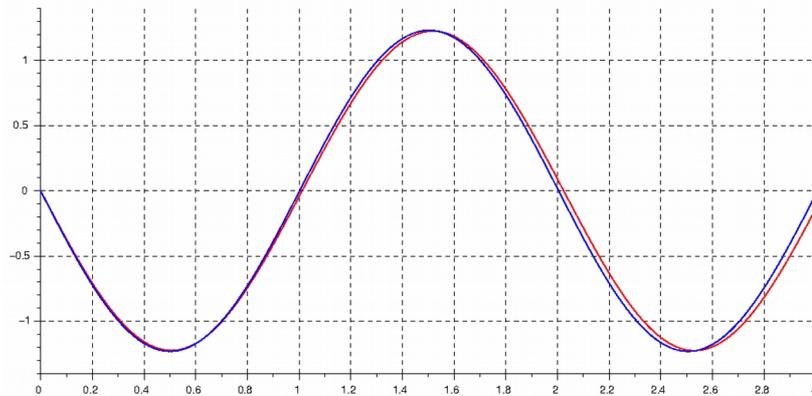


Figura 2. In blu: $y'(t)$, in rosso: $U(2,:)$.

L'effettiva vicinanza tra le curve è più evidente dalla Figura 3 che riporta il grafico nel piano delle fasi della traiettoria della soluzione per il problema linearizzato e dell'approssimazione numerica per il problema non lineare.

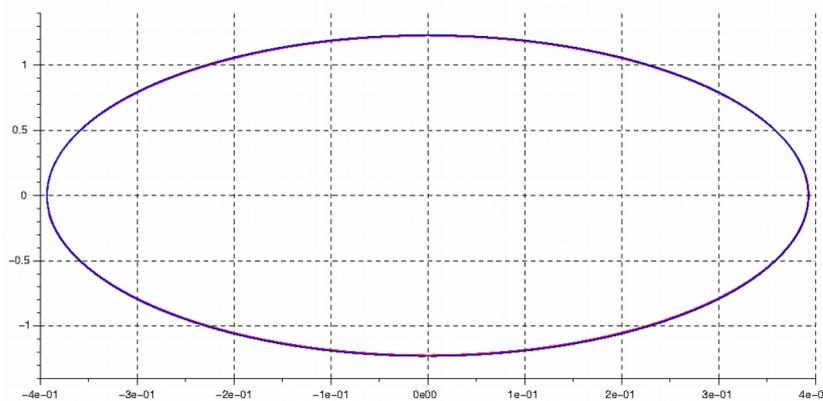


Figura 3. Traiettoria nel piano delle fasi: soluzione del sistema linearizzato (in blu), approssimazione numerica per il sistema non lineare (in rosso).

In Figura 4 è riportato il grafico del passo adottato dalla procedura in funzione dell'istante di integrazione. L'ultimo valore del passo è singolarmente piccolo perché ...

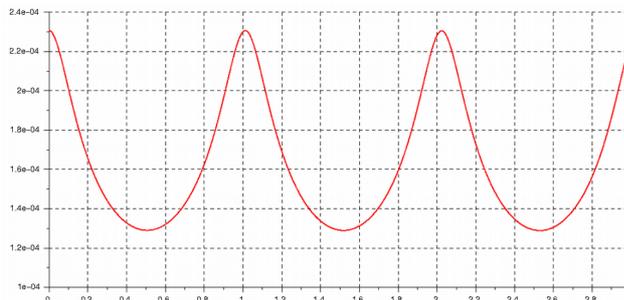


Figura 4. Grafico del passo adottato dalla procedura.

(1.12) Osservazione.

Si ricordi (Osservazione (1.07)) che in base ai risultati del Teorema di convergenza per il metodo TS(1), per $E \rightarrow 0$ è ragionevole aspettarsi che:

N tende a infinito come $1/\sqrt{E}$ e per ogni k: $ET(k)$ tende a zero come \sqrt{E}

Allora, indicando con N ed $ET = \max\{ ET(k) \}$ il numero di passi e l'errore totale massimo ottenuti con valore massimo consentito per la stima dell'errore locale E e con N' ed ET' i corrispondenti valori ottenuti con valore massimo consentito E', è ragionevole aspettarsi che:

$$E' = \alpha^2 E \Rightarrow \frac{N'}{N} \text{ circa uguale ad } \frac{1}{\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{ET'}{ET} \text{ circa uguale ad } \alpha$$

I risultati ottenuti sono coerenti con questa aspettativa (Esercizio: verificare, usando i dati riportati nelle tabelle!).

(1.13) Esercizio.

Per questo esercizio può essere utile il file PendoloTS1_pv.sce che si trova nella pagina web del corso, sezione "altro materiale didattico".

1. Se $z(t)$ è la soluzione del problema non lineare (ED), (CI) allora si ha certamente:

$$\max_t |z(t)| = x_0$$

Usare la funzione max di Scilab per determinare:

$$U^* = \max_k |U(1,k)|$$

e calcolare poi l'errore relativo:

$$\text{eps} = \frac{| U^* - x_0 |}{| x_0 |}$$

per i tre valori di E considerati nell'Esempio (33.01).

2. Detta $EM(x,x')$ l'energia meccanica del sistema, utilizzare Scilab per determinare:

$$EM^* = \max_k | EM(U(1,k), U(2,k)) |$$

e calcolare poi l'errore relativo:

$$\text{eps} = \frac{| EM^* - EM(x_0,0) |}{| EM(x_0,0) |}$$

per i tre valori di E considerati nell'Esempio (1.11).
