

Esercitazione 8

Nella prima parte di questa esercitazione discuteremo due *applicazioni* della ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti: l'*approssimazione numerica di un integrale* e l'*approssimazione del grafico di una funzione*. Nella seconda parte si realizzano le procedure **integrale** per la prima applicazione e **grafico** per la seconda, e si utilizzano in due esempi.

Prima parte

Siano $[a, b]$ un intervallo non degenere e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata seconda continua.

- *Approssimazione numerica di un integrale*

Si vuole approssimare il numero reale:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Scelto un numero intero $k \geq 1$ e posto, per $j = 0, \dots, k$:

$$x_j = a + \frac{b-a}{k} j$$

siano $\tau = (x_0, x_1) \cup \dots \cup (x_{k-1}, x_k)$ e σ_k l'elemento di $S(\tau)$ che interpola i dati $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$. Per approssimare I si utilizza il numero reale:

$$J_k = \int_a^b \sigma_k(x) dx$$

La scelta è ragionevole. Infatti, utilizzando la base canonica di $S(\tau)$ si ha:

$$\sigma_k = f(x_0)s_0 + \dots + f(x_k)s_k$$

e per il Teorema sull'errore di ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti, posto $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$:

$$e(f) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \sigma_k(x)| \leq \frac{M_2}{8} \left(\frac{b-a}{k} \right)^2$$

Allora:

- * Per l'errore assoluto commesso utilizzando J_k per approssimare I si ha:

$$|I - J_k| \leq \frac{M_2}{8} \frac{(b-a)^3}{k^2}$$

dunque: *l'errore può essere reso piccolo quanto si vuole scegliendo k sufficientemente grande.*

Infatti:

$$\begin{aligned} |I - J_k| &= \left| \int_a^b (f(x) - \sigma_k(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \sigma_k(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \sigma_k(x)| dx = (b-a) \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \sigma_k(x)| \leq \\ &\leq \frac{M_2}{8} \frac{(b-a)^3}{k^2} \end{aligned}$$

* Il calcolo di J_k è elementare:

$$J_k = \frac{b-a}{k} \left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{k-1}) + \frac{1}{2}f(x_k) \right) \quad (*)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} J_k &= \int_a^b \sigma_k(x) \, dx = \int_a^b (f(x_0)s_0(x) + \dots + f(x_k)s_k(x)) \, dx = \\ &= f(x_0) \int_a^b s_0(x) \, dx + \dots + f(x_k) \int_a^b s_k(x) \, dx \end{aligned}$$

Poiché:

$$\int_a^b s_j(x) \, dx = \begin{cases} \frac{b-a}{2k} & \text{se } j = 0, k \\ \frac{b-a}{k} & \text{se } j = 1, \dots, k-1 \end{cases}$$

si ottiene la formula cercata.

L'espressione (*) si chiama, per un motivo evidente, *formula dei trapezi*. I valori $x_j, j = 0, \dots, k$ vengono detti *odi*.

L'approssimazione proposta consiste nell'approssimare l'integrale I di f con un'opportuna *somma pesata* J_k di campioni di f . Utilizzando il calcolatore, il valore di quest'ultima somma è *approssimato* con quello, Φ_k , determinato da un algoritmo. Per l'errore assoluto commesso approssimando I con Φ_k si ha:

$$|I - \Phi_k| = |(I - J_k) + (J_k - \Phi_k)| \leq |I - J_k| + |J_k - \Phi_k|$$

Il primo addendo, $|I - J_k|$, è indipendente dall'uso del calcolatore: tiene conto soltanto dell'aver approssimato l'integrale con la somma pesata. Come abbiamo visto, per $k \rightarrow \infty$ l'addendo tende a zero come $1/k^2$. Il secondo addendo, $|J_k - \Phi_k|$, tiene conto delle limitazioni imposte dall'uso del calcolatore nella somma pesata. Una paziente analisi degli errori introdotti dai vari arrotondamenti mostra che, nel caso peggiore, l'addendo *cresce*, per $k \rightarrow \infty$ come k . Complessivamente, detti C, C' numeri reali positivi opportuni e u la precisione di macchina, si ha:

$$|I - \Phi_k| \leq \frac{C}{k^2} + C'uk$$

La funzione che maggiora l'errore è *decescente* fino a valori di k usualmente ben al di sopra di quelli utilizzati.

- *Approssimazione del grafico di una funzione*

Si vuole disegnare una curva che approssima il grafico di f su $[a, b]$.

Scelto un numero intero $k \geq 1$ e posto, per $j = 0, \dots, k$:

$$x_j = a + \frac{b-a}{k} j$$

siano $\tau = (x_0, x_1) \cup \dots \cup (x_{k-1}, x_k)$ e σ_k l'elemento di $S(\tau)$ che interpola i dati $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$. Per approssimare il grafico di f si utilizza il grafico di σ_k .

La scelta è ragionevole. Infatti, per il Teorema sull'errore di ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti, posto $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ si ha:

$$e(f) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \sigma_k(x)| \leq \frac{M_2}{8} \left(\frac{b-a}{k} \right)^2$$

Allora: *l'errore tra il grafico di f e quello di σ può essere reso piccolo quanto si vuole scegliendo k sufficientemente grande*. Inoltre il grafico di σ_k si ottiene in modo elementare: disegnando la spezzata di vertici $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$. In *Scilab*, realizzata una procedura **f** da utilizzare per approssimare i valori di f ed assegnati valori alle variabili **a**, **b** e **k**, le istruzioni:

```
--> x = linspace(a,b,k+1)';
```

```
--> plot2d(x,f(x));
```

producono il grafico richiesto.

Seconda parte

- *La procedura integrale*

La definizione seguente realizza una procedura che, *dati* gli estremi dell'intervallo di integrazione a, b , una *function* f da utilizzare per approssimare i valori della funzione integranda f e il numero k di intervalli di τ , *restituisce* l'approssimazione J dell'integrale:

$$\int_a^b f(x) dx$$

ottenuta con la formula dei trapezi su $k + 1$ nodi:

```
function J = integrale(a,b,f,k)
//
// Approssima l'integrale di f su [a,b] con la formula dei trapezi
// che utilizza k + 1 nodi.
//
pesi = ones(1,k+1);
pesi(1) = 1/2; pesi(k+1) = 1/2;
nodi = linspace(a,b,k+1)';
J = (b-a) * pesi * f(nodi) / k;
endfunction
```

Si consideri l'integrale:

$$I = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

Per approssimare i valori di $f(x) = \sin x$ si utilizza la funzione:

```
function y = f(x)
y = sin(x);
endfunction
```

Eseguiti gli assegnamenti $a = 0$ e $b = \pi$, i comandi:

```
\\ Intestazione della tabella
printf('\n  k          J(k)          |2 - J(k)|          |2 - J(k)| < SUP\n');
printf('  -----');
for k = 50:50:500,
    J = integrale(a,b,f,k);
    M2 = 1;
    \\ Calcolo della stima della maggiorazione dell'errore |I - J|
    SUP = M2 * (b-a)^3 / (8 * k^2);
    \\ Scrittura della riga nella tabella
    printf('\n %4d %9.8e %3.2e          %s\n',...
           k,    J,    abs(2 - J),    string(abs(2 - J) < SUP));
end;
```

generano, nella *console*, la tabella:

k	J(k)	2 - J(k)	2 - J(k) < SUP
50	1.99934198e+00	6.58e-04	T
100	1.99983550e+00	1.64e-04	T
150	1.99992689e+00	7.31e-05	T
200	1.99995888e+00	4.11e-05	T
250	1.99997368e+00	2.63e-05	T
300	1.99998172e+00	1.83e-05	T
350	1.99998657e+00	1.34e-05	T
400	1.99998972e+00	1.03e-05	T
450	1.99999188e+00	8.12e-06	T
500	1.99999342e+00	6.58e-06	T

Si osservi che, coerentemente con la teoria esposta nella Prima parte, l'errore $|I - J_k|$ *decrece* all'aumentare di k ed è minore della maggiorazione:

$$\text{SUP} = \frac{M_2}{8} \frac{(b-a)^3}{k^2}$$

- *La procedura grafico*

La definizione seguente realizza una procedura che, *dati* gli estremi dell'intervallo a, b , una *function* f che approssima i valori della funzione f , il numero reale E e una maggiorazione M del massimo M_2 della funzione $|f''(x)|$ su $[a, b]$, *genera* il grafico di una funzione σ , continua e lineare a tratti su un opportuno insieme τ , tale che:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \sigma(x)| < E$$

e *restituisce* il numero j dei campioni di f utilizzati per la determinazione di σ :

```
function j = grafico(a,b,f,E,M)
//
// Data una funzione f con derivata seconda continua
// ed una maggiorazione M del massimo di | f''(x) | su [a,b],
// genera il grafico di una funzione s, continua e lineare
// a tratti, tale che:
//
//      per ogni x in [a,b] si ha | f(x) - s(x) | < E
//
// e restituisce il numero j di campioni di f utilizzati per
// determinare s.
//
k = ceil((b - a) * sqrt(M / (8 * E)));
j = k + 1;
t = linspace(a,b,j)';
plot2d(t,f(t),style = 2);
xgrid(); xlabel('x');
xtitle('Grafico di f(x) con errore < ' + ...
      msprintf('%3.2e',E) + ' (' + msprintf('%d',j) + ' punti)');
endfunction
```

Una volta scelto il valore di j , la procedura esegue un *campionamento uniforme* di f con j istanti e genera il grafico della funzione σ continua e lineare a tratti sugli intervalli aperti definiti dagli istanti di campionamento che ricostruisce i campioni ottenuti. Il valore di j scelto dalla procedura è ottenuto calcolando il più piccolo numero intero k che rende vera la relazione:

$$\frac{M}{8} \left(\frac{b-a}{k} \right)^2 < E \quad (\Rightarrow e(f) < E)$$

e ponendo $j = k + 1$.

Si consideri la funzione $f(x) = \sin x$. Come nel punto precedente, per approssimare i valori di f si utilizza la funzione:

```
function y = f(x)
    y = sin(x);
endfunction
```

Eseguiti gli assegnamenti $a = 0$ e $b = \%pi$, i comandi:

```
E = 1d-3; M = 1;
subplot(211); j = grafico(a,b,f,E,M);
// Istanti di campionamento
t = linspace(a,b,j)';
// 10 punti per intervallo + istanti di campionamento
x = linspace(a,b,j + 10*(j - 1))';
// Errore = | f(x) - s(x) |
errore = abs( f(x) - interp1(t,f(t),x) );
// Stampa nella console una stima di e(f)
printf('\nMassimo scostamento tra i grafici: %3.2e\n', max(errore));
// Grafico dell'errore
subplot(212); plot2d(x,errore,style = 5);
                xgrid(); xlabel('x'); ylabel('errore');
```

producono i grafici riportati in Figura 1 e, nella *console*:

Massimo scostamento tra i grafici: 9.43e-04

I valori della differenza $f - \sigma$ sono calcolati utilizzando la funzione `interp1`:

* `interp1`

Questa *funzione predefinita* calcola i valori, in un insieme assegnato di punti, della funzione continua e lineare a tratti che interpola dati assegnati. Precisamente, dati vettori x e y di n componenti e xp di m componenti, l'assegnamento:

$$yp = \text{interp1}(x,y,xp)$$

determina la funzione σ continua e lineare a tratti sugli intervalli $(x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ che interpola i dati $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ e restituisce il vettore yp di componenti $\sigma(xp_1), \dots, \sigma(xp_m)$.

La procedura `grafico` richiede all'utilizzatore di fornire una maggiorazione M di M_2 . Per eliminare, parzialmente, questa incombenza si osservi che una *stima* di M_2 , quasi sempre *per difetto*, si ottiene, scelto un sottoinsieme *finito* A di $[a, b]$, utilizzando $\max_{x \in A} |f''(x)|$. La seguente modifica della definizione precedente realizza una procedura che, *data* una *function* `d2f` che approssima i valori di f'' , calcola una stima di M_2 e la utilizza per determinare la funzione σ il cui grafico approssima quello di f :

```
function [j,M] = grafico(a,b,f,E,d2f)
//
// Data una funzione f con derivata seconda continua
// ed una funzione d2f che restituisce i valori di f'',
```

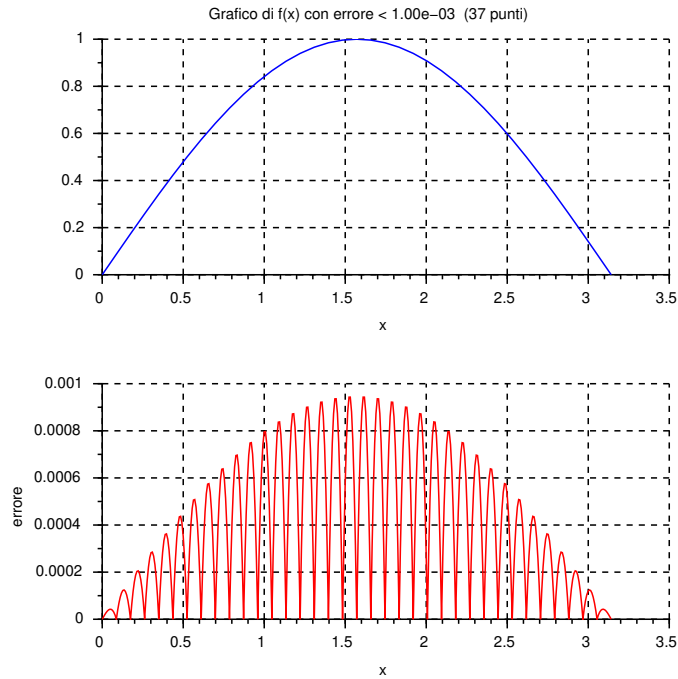


Figura 1: Grafici relativi alla procedura grafico.

```
// genera il grafico di una funzione s, continua e lineare
// a tratti, tale che:
//
//     per ogni x in [a,b] si ha | f(x) - s(x) | < E
//
// e restituisce il numero j di campioni di f utilizzati per
// determinare s e la riga M contenente le stime del massimo M2
// di | f''(x) | su [a,b] determinate dalla procedura.
//
// Stima iniziale di M2
n = 10;
t = linspace(a,b,n)';
M(1) = max(abs(d2f(t)));
// Valore iniziale di j
k = ceil((b - a) * sqrt(M(1) / (8 * E)));
j = k + 1;
// Nuova stima di M2
t = linspace(a,b,j)';
NuovoM = max(abs(d2f(t)));
// Iterazione per migliorare la stima di M2
while NuovoM > M($),
    M($+1) = NuovoM;
    k = ceil((b - a) * sqrt(M($) / (8 * E)));
    j = k + 1;
    // Nuova stima di M2
    t = linspace(a,b,j)';
    NuovoM = max(abs(d2f(t)));
end;
plot2d(t,f(t),style = 2);
xgrid(); xlabel('x');
xtitle('Grafico di f(x) con errore < ' + ...
    msprintf('%3.2e',E) + ' (' + msprintf('%d',j) + ' punti)');
```

```
endfunction
```

Per $f(x) = \sin x$, scelta la funzione:

```
function y = d2f(x)
    y = - sin(x);
endfunction
```

per approssimare i valori di f'' ed eseguiti gli assegnamenti $a = 0$ e $b = \pi$, i comandi:

```
--> E = 1d-3;
```

```
--> [j,M] = grafico(a,b,f,E,d2f);
```

producono *lo stesso grafico* riportato in alto in Figura 1. Infatti la procedura determina *esattamente* M_2 :

```
-->M
```

```
M =
```

```
0.9848078
```

```
0.9989931
```

```
1.
```

```
-->M(3) == 1
```

```
ans =
```

```
T
```

Esercizi

1. Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata seconda continua, M una maggiorazione del massimo di $|f''(x)|$ su $[a, b]$, I il valore dell'integrale di f su $[a, b]$ e f una *function* che approssima i valori di f .

Realizzare una procedura, di intestazione:

```
[J,n] = integrale(a,b,f,M,err)
```

che, utilizzando la formula dei trapezi, restituisce un'approssimazione J di un numero reale J tale che:

$$|I - J| \leq \text{err}$$

ed il numero n di nodi utilizzato.

Utilizzare la procedura per approssimare i valori:

$$0 = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \quad , \quad \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

2. Utilizzare la versione finale della procedura `grafico` per approssimare il grafico della funzione $\sin(1/x)$ su $[\frac{5}{100}, 2]$.