3 Interpolazione

Se $\Omega \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, si indica con $C(\Omega)$ lo *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ delle funzioni continue da Ω in $\mathbb{R}$.

3.1 Interpolazione polinomiale

Siano k un numero intero non negativo, $P_k(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei *polinomi a coefficienti reali di grado al più* k (che consideriamo come *sottospazio* di $C(\mathbb{R})$) $x_0, \ldots, x_k$ numeri reali *distinti*[34] e $y_0, \ldots, y_k$ numeri reali. Il *problema dell'interpolazione polinomiale* consiste nel *determinare* gli elementi $p \in P_k(\mathbb{R})$ che *interpolano i dati*:

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$$

ovvero tali che:

$$p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_k) = y_k$$

3.1.1 Osservazione

Si consideri il problema di intepolazione polinomiale di determinare gli elementi di $P_k(\mathbb{R})$ che interpolano i dati: $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$. Si ha:

(a) *Interpretazione geometrica*

Considerati i dati $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$ come *coordinate di* $k+1$ *punti* in un piano cartesiano, il problema dell'interpolazione polinomiale consiste nel determinare *gli elementi di* $P_k(\mathbb{R})$ *il cui grafico contiene tutti i punti* assegnati.

(b) *Riformulazione*

Ricordato che lo spazio vettoriale $P_k(\mathbb{R})$ ha dimensione $k+1$, sia $q_0(x), \ldots, q_k(x)$ una sua *base*. Allora: $p(x) = a_0 q_0(x) + \cdots + a_k q_k(x)$ *è soluzione del problema di interpolazione polinomiale* se e solo se:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 q_0(x_0) + \cdots + a_k q_k(x_0) = y_0 \\ &\vdots \\ p(x_k) &= a_0 q_0(x_k) + \cdots + a_k q_k(x_k) = y_k \end{aligned}$$

ovvero *se e solo se la colonna dei coefficienti*:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

è soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \cdots & q_k(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_0(x_k) & q_1(x_k) & \cdots & q_k(x_k) \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

Si osservi che si ottengono *tante equazioni quante sono le condizioni* richieste a $p(x)$ e *il numero di incognite è pari alla dimensione* di $P_k(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $q_0(x), \ldots, q_k(x)$ è una base di $P_k(\mathbb{R})$, l'insieme delle soluzioni del problema di interpolazione polinomiale e quello delle soluzioni del sistema di equazioni lineari sono in *corrispondenza biunivoca*.

3.1.2 Teorema (di esistenza ed unicità della soluzione)

Per ogni k numero intero non negativo, $x_0, \ldots, x_k$ numeri reali distinti e $y_0, \ldots, y_k$ numeri reali, *esiste un solo elemento in* $P_k(\mathbb{R})$ *che interpola i dati* $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$.

Dimostrazione. Siano $\ell_0(x), \ldots, \ell_k(x)$ gli elementi di $P_k(\mathbb{R})$ definiti da:

$$\ell_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_k)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)} \quad , \quad j = 0, \ldots, k$$

Si osservi che per ogni j si ha:

[34] Ovvero: $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$

(a) $\ell_j(x_j) = 1$

(b) se $i \neq j$ allora $\ell_j(x_i) = 0$

I $k+1$ polinomi $\ell_0(x), \dots, \ell_k(x)$ sono *linearmente indipendenti.* Infatti, se $a_0, \dots, a_k$ sono coefficienti tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$a_0\ell_0(x) + \cdots + a_k\ell_k(x) = 0$$

allora per $j = 0, \dots, k$ si ha:

$$0 = a_0\ell_0(x_j) + \cdots + a_k\ell_k(x_j) = a_j$$

Dunque $\ell_0(x), \dots, \ell_k(x)$ sono una *base* di $P_k(\mathbb{R})$ detta *base di Lagrange* relativa ai punti $x_0, \dots, x_k$. Inoltre:

$$\begin{bmatrix} \ell_0(x_0) & \ell_1(x_0) & \cdots & \ell_k(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_0(x_k) & \ell_1(x_k) & \cdots & \ell_k(x_k) \end{bmatrix} = I$$

Per quanto detto nel punto (b) dell'Osservazione 3.1.1, il problema di interpolazione polinomiale ha *una ed una sola soluzione*:

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + \cdots + y_k\ell_k(x)$$

L'espressione trovata prende il nome di *forma di Lagrange del polinomio interpolante.*

3.1.3 Esercizio

Determinare l'elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati: $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$.

Soluzione.

Numerati i dati nell'ordine delle ascisse crescenti, la *base di Lagrange* di $P_2(\mathbb{R})$ relativa ai punti x_0, x_1, x_2 è:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \tfrac{1}{3}(x^2 - 2x) \qquad , \qquad \ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = -\tfrac{1}{2}(x^2 - x - 2)$$

e:

$$\ell_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \tfrac{1}{6}(x^2 + x)$$

La *forma di Lagrange* dell'elemento cercato è allora:

$$p(x) = 0 \cdot \ell_0(x) + 1 \cdot \ell_1(x) - 2 \cdot \ell_2(x)$$

Lo stesso elemento può essere individuato utilizzando la più usuale *base di Vandermonde* di $P_2(\mathbb{R})$:

$$1, x, x^2$$

In questo caso il sistema di equazioni a cui si riducono le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ottiene l'elemento cercato in *forma di Vandermonde*:

$$p(x) = 1 \cdot 1 + \tfrac{1}{6} \cdot x - \tfrac{5}{6} \cdot x^2$$

3.1.4 Osservazione (forma di Newton del polinomio interpolante)

La scelta della base di $P_k(\mathbb{R})$ *non* fa cambiare la soluzione del problema di interpolazione in esame *ma* può agevolarne o meno la determinazione. La *base di Lagrange*, di non immediata manipolazione, genera il sistema di equazioni lineari *più semplice* da risolvere per la determinazione dei coefficienti perché la matrice del sistema è I. La più usuale *base di Vandermonde*, invece, genera un sistema di equazioni *non semplice* da risolvere perché la matrice del sistema è la *matrice di Vandermonde* (vedere l'Esercizio *E2*) e la soluzione del sistema richiede la sua fattorizzazione. Una terza scelta è la *base di Newton* relativa ai punti $x_0, \ldots, x_{k-1}$:

$$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$$

Gli elementi di questa base sono polinomi *di grado crescente* e le condizioni di interpolazione si traducono in un sistema di equazioni lineari con *matrice triangolare inferiore*, dunque semplice da risolvere.

3.1.5 Esercizio

Assegnati i dati $(0, 1), (-1, 2), (3, 10), (1, 10)$:

(a) Determinare la *forma di Newton* del polinomio interpolante utilizzando i dati nell'ordine in cui sono stati assegnati;

(b) Determinare la forma di Newton del polinomio interpolante ordinando i dati secondo ascisse crescenti;

(c) Calcolare il *valore* del polinomio interpolante in $-1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Soluzione.

(a) Sono stati assegnati quattro dati, dunque $k = 3$. Utilizzando i dati nell'ordine in cui sono stati assegnati la *base di Newton* di $P_3(\mathbb{R})$ risulta:

$$1, x, x(x + 1), x(x + 1)(x - 3)$$

Le condizioni di interpolazione si traducono nel sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La soluzione b del sistema si ottiene con la procedura SA:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p(x) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot x + 1 \cdot x(x + 1) - 2 \cdot x(x + 1)(x - 3)$$

(b) *Lasciata al lettore.*

(c) Un procedimento per calcolare il valore di p in $a \in \mathbb{R}$ è, dette $x_0, \ldots, x_k$ le ascisse dei dati nell'ordine considerato e b la colonna di componenti i coefficienti $b_0, \ldots, b_k$:

(1) $r_0 = 1; r_1 = a - x_0;$ `per` $j = 2, \ldots, k$ `ripeti` $r_j = r_{j-1}(a - x_{j-1})$;

(2) $r = (r_0, \ldots, r_k)$; $p(a) = r\, b$

In (1) si calcolano i valori degli elementi della base di Newton in a, in (2) si calcola il valore in a della combinazione lineare che realizza il polinomio interpolante. La procedura richiede $2k$ somme e $2k - 1$ prodotti. Per il calcolo in m punti sono richieste $2mk$ somme e $2m(k - 1)$ prodotti e quindi il costo del calcolo è: $(4k - 1)m$. Nel caso in esame si ottiene:

$$\begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \\ p(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 4 & 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 17 \\ 10 \\ -23 \end{bmatrix}$$

E1 Verificare che le due forme, di *Lagrange* e *Vandermonde*, dell'elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati dell'Esercizio 3.1.3 individuano lo stesso polinomio.

E2 Siano k un numero intero non negativo e $1, \ldots, x^k$ la *base di Vandermonde* di $P_k(\mathbb{R})$. Assegnati $x_0, \ldots, x_k$ numeri reali *distinti* e $y_0, \ldots, y_k$ numeri reali, verificare che il sistema di equazioni lineari a cui si riducono le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^k \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

In base al Teorema di esistenza ed unicità della soluzione, la matrice del sistema, nota come *matrice di Vandermonde* relativa ai punti $x_0, \ldots, x_k$, è *invertibile.*

E3 ♠ Realizzare in *Scilab* una procedura che *dati* un vettore a di componenti $a_1, \ldots, a_m$ e due vettori x e b di componenti $x_0, \ldots, x_k$ e, rispettivamente, $b_0, \ldots, b_k$, *restituisce* il vettore p di componente j-esima:

$$p_j = b_0 + b_1(a_j - x_0) + \cdots + b_k(a_j - x_0) \cdots (a_j - x_{k-1}) \quad , \quad j = 1, \ldots, m$$

Utilizzare poi la procedura per disegnare, su uno stesso piano cartesiano, in rosso *il grafico* del polinomio del punto (a) dell'Esercizio 3.1.5 e con crocette *i dati* interpolati.

E4 Dopo aver rappresentato i dati $(0,0), (1,1), (3,3), (4,4)$ su un piano cartesiano, determinare la forma di Vandermonde e la forma di Newton *del* polinomio interpolante.

E5 ★ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = Q(n)$$

con $Q \in P_3(\mathbb{R})$. Determinare la forma di Newton di Q e dedurne la forma di Vandermonde.

3.2 Problema lineare di interpolazione

Siano F un sottospazio vettoriale di $C(\mathbb{R})$ di dimensione *finita* d, $L_0, \ldots, L_k$ applicazioni lineari da F in $\mathbb{R}$ e $y_0, \ldots, y_k$ numeri reali. Il *problema lineare di intepolazione* consiste nel *determinare* gli elementi $f \in F$ che verificano le condizioni:

$$L_0(f) = y_0, \ldots, L_k(f) = y_k$$

3.2.1 Esempio

(1) Il problema di interpolazione polinomiale definito da $k, x_0, \ldots, x_k$ e $y_0, \ldots, y_k$ è il problema lineare di interpolazione definito da: $F = P_k(\mathbb{R})$, $L_0(f) = f(x_0), \ldots, L_k(f) = f(x_k)$ e $y_0, \ldots, y_k$.

Infatti: $P_k(\mathbb{R})$ è un sottspazio di $C(\mathbb{R})$ di dimensione finita e per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione $L : P_k(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $L(p) = p(a)$ è tale che:

$$p, q \in P_k(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad L(p+q) = (p+q)(a) = p(a) + q(a) = L(p) + L(q)$$

e:

$$p \in P_k(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad L(\alpha\, p) = (\alpha\, p)(a) = \alpha\, p(a) = \alpha\, L(p)$$

ovvero *è lineare.*

(2) Il problema lineare di interpolazione definito da $F = P_3(\mathbb{R})$, $L_0(p) = p(0)$, $L_1(p) = p(2)$ e $y_0 = 2, y_1 = -6$ *non è un problema di interpolazione polinomiale.*

Infatti: Si cercano in $P_3(\mathbb{R})$, spazio vettoriale di dimensione *quattro*, elementi che verificano *solo due* condizioni di interpolazione. In particolare, al problema in esame *non si applica* il Teorema 3.1.2 di esistenza ed unicità.

(3) Il problema lineare di interpolazione definito da $F = P_2(\mathbb{R})$, $L_0(p) = p(0)$,

$$L_1(p) = \int_0^1 p(\theta)d\theta$$

$L_2(p) = p'(0)$ e $y_0 = 2, y_1 = -6, y_2 = 4$ *non è un problema di interpolazione polinomiale.*

Infatti: Si cercano in $P_2(\mathbb{R})$, spazio vettoriale di dimensione tre, elementi che verificano tre condizioni *ma non tutte del tipo richiesto dal problema di interpolazione polinomiale.*

Si osservi che assegnati numeri reali a, b tali che $a < b$, l'applicazione $L : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da:

$$L(p) = \int_a^b p(\theta)d\theta$$

è lineare, come pure, per ogni intero positivo j, quella definita da:

$$L(p) = p^{(j)}(a)$$

(4) Il problema lineare di interpolazione definito da $F = \operatorname{span}\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$, $L_0(f) = f(\pi)$,

$$L_1(f) = \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

e $y_0 = 2, y_1 = -6$ *non è un problema di interpolazione polinomiale.*

Si osservi che le funzioni $1, \operatorname{sen} x$ e $\cos x$, sono funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ *linearmente indipendenti*: *se* $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sono tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $a_1 + a_2 \operatorname{sen} x + a_3 \cos x = 0$ *allora* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

3.2.2 Osservazione (Riformulazione di un problema lineare di interpolazione)

Ricordato che lo spazio vettoriale F ha dimensione d, sia $b_1(x), \ldots, b_d(x)$ una sua *base*. Allora: $g(x) = a_1 b_1(x) + \cdots + a_d b_d(x)$ *è soluzione del problema lineare di interpolazione* se e solo se:

$$\begin{gathered} L_0(g) = a_1 L_0(b_1) + \cdots + a_d L_0(b_d) = y_0 \\ \vdots \\ L_k(g) = a_1 L_k(b_1) + \cdots + a_d L_k(b_k) = y_k \end{gathered}$$

ovvero *se e solo se la colonna dei coefficienti*:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

è soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} L_0(b_1) & L_0(b_2) & \cdots & L_0(b_d) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_k(b_1) & L_k(b_2) & \cdots & L_k(b_d) \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

Si osservi che si ottengono $k+1$ equazioni (*tante quante sono le condizioni* richieste a g) e il numero di incognite è d (*pari alla dimensione di* F), ovvero la matrice del sistema è $(k+1) \times d$. Inoltre, poiché $b_1(x), \ldots, b_d(x)$ è una base di F, l'insieme delle soluzioni del problema lineare di interpolazione e quello delle soluzioni del sistema di equazioni lineari sono in *corrispondenza biunivoca.*

3.2.3 Esempio

Determinare gli elementi di $P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(1) = 2 \quad , \quad \int_0^6 p(t)\,dt = 0$$

Soluzione

Si verifica che il problema posto è lineare di interpolazione, dunque risolubile studiando un sistema di equazioni lineari. Il sistema risulta di *due equazioni* in *tre incognite* quindi il problema può avere *zero* soluzioni oppure *infinite.*

Si consideri la base di Newton di $P_2(\mathbb{R})$:

$$1\ ,\ x-1\ ,\ (x-1)x$$

Le condizioni si traducono nel sistema di *due* equazioni in *tre* incognite:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 54 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

dunque le (infinite) soluzioni del problema lineare di interpolazione sono:

$$p_t(x) = 2 \cdot 1 - (1 + 2\,t) \cdot (x-1) - 2\,t \cdot (x-1)x \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Esercizi

E6 Studiare i problemi lineari di interpolazione proposti nell'Esempio 3.2.1, punti (2), (3) e (4).

E7 Determinare gli elementi $p \in P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(0) = 0 \quad , \quad p'(0) = 0 \quad , \quad p(1) = 1$$

Sia q uno di essi. Dimostrare che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ q(x) & \text{per } x \geqslant 0 \end{cases}$$

è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la funzione derivata prima è continua.

E8 ★ Sia T un numero reale positivo. Per ogni funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed ogni numero reale x sia:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_x^{x+T} f(t)\,dt$$

il *valor medio* di f sull'intervallo $[x, x+T]$.

(a) Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'applicazione $L : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $L(f) = \bar{f}(x)$ è *lineare* su $\mathbb{R}$.

(b) Assegnati numeri reali y_0 e y_1, determinare gli elementi $p \in P_1(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$\bar{p}(0) = y_0 \qquad , \qquad \bar{p}(1) = y_1$$

3.3 Campionamento e ricostruzione

Alcuni interessanti problemi lineari di interpolazione hanno origine dal problema della *ricostruzione* di una funzione continua a partire da un insieme assegnato di suoi valori, detti *campioni*.[35]

Siano k un numero intero non negativo, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non degenere e $t_0, \ldots, t_k$ numeri reali *distinti* in I. La funzione $c : C(I) \to \mathbb{R}^{k+1}$ definita da:

$$c(f) = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_k) \end{bmatrix}$$

si chiama *funzione di campionamento agli istanti* (di campionamento) $t_0, \ldots, t_k$. L'applicazione c risulta *lineare* e *non invertibile*.

Un'applicazione *lineare* $r : \mathbb{R}^{k+1} \to C(I)$ tale che:

$$\text{per ogni } y \in \mathbb{R}^{k+1} \text{ si ha: } c\big(\, r(y)\,\big) = y$$

ovvero tale che $r(y)$ *interpola i dati* $(t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$, si chiama *funzione di ricostruzione* (relativa a c).

3.3.1 Esempio (ricostruzione mediante interpolazione polinomiale)

Sia c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \ldots, t_k$. Dette $y_0, \ldots, y_k$ le componenti di $y \in \mathbb{R}^{k+1}$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^{k+1} \to C(\mathbb{R})$ definita da:

$$\rho(y) = \text{l'elemento di } P_k(\mathbb{R}) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$$

è una funzione di ricostruzione relativa a c, dunque *esistono* funzioni di ricostruzione relative a c.

Infatti: Utilizzando la *forma di Lagrange* del polinomio interpolante si constata che ρ *è lineare*; inoltre, per definizione, $\rho(y)$ interpola i dati $(t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$.

Si è osservato che la funzione di campionamento c *non è invertibile* dunque, scelta comunque una funzione di ricostruzione r, esistono funzioni continue f tali che: $r\big(c(f)\big) \neq f$. Per *misurare* quanto diverse sono f e $r\big(c(f)\big)$ si adotta la definizione seguente:

3.3.2 Definizione (errore di ricostruzione)

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo *limitato* non degenere, c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \ldots, t_k \in I$, r una funzione di ricostruzione relativa a c e $f \in C(I)$. Il numero reale non negativo:

$$e(f) = \max_{t \in I} \big|\, f(t) - r\big(\, c(f)\,\big)(t)\,\big|$$

si chiama *errore di ricostruzione* di f. Si osservi che $e(f) = 0$ se e solo se $f = r\big(\, c(f)\,\big)$.

Il *problema del campionamento e ricostruzione* consiste nel *determinare condizioni sufficienti a garantire un errore di ricostruzione soddisfacentemente piccolo.*

Esercizi

E9 Siano $t_0 = 0, t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ istanti di campionamento in $I = [0, 2]$ e c la funzione di campionamento a tali istanti. Studiare il seguente problema lineare di interpolazione: determinare gli elementi $p \in P_3(\mathbb{R})$ tali che $c(p) = 0$.

E10 Si considerino la funzione c di campionamento agli istanti t_0, t_1, t_2 e, dette y_0, y_1, y_2 le componenti di $y \in \mathbb{R}^3$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^3 \to C(\mathbb{R})$ definita da:

$$\rho(y) = \text{l'elemento di } P_2(\mathbb{R}) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2)$$

Dimostrare che assegnati $z, w \in \mathbb{R}^3$ si ha:

$$\rho(3z + 7w) = 3\,\rho(z) + 7\,\rho(w)$$

[35] Si pensi, ad esempio, alla registrazione e riproduzione di un brano musicale con tecniche *digitali*.

E11 Siano $t_0 = 0, t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ istanti di campionamento in $I = [0, 2]$, c la funzione di campionamento a tali istanti e e_1, e_2, e_3 gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Per $k = 1, 2, 3$ determinare l'elemento $p_k \in P_2(\mathbb{R})$ tale che $c(p) = e_k$.

E12 ★ Siano $t_0 = 0, t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ istanti di campionamento in $I = [0, 2]$ e $c : C(I) \to \mathbb{R}^3$ la funzione di campionamento a tali istanti. Detta c_* la *restrizione* di c a $P_2(\mathbb{R})$, dimostrare che la funzione di ricostruzione mediante interpolazione polinomiale definita nell'Esempio 3.3.1 è la *funzione inversa* di c_*.

3.3.1 Ricostruzione con interpolazione polinomiale

Si consideri la funzione di ricostruzione mediante interpolazione polinomiale definita nell'Esempio 3.3.1. Si ha:

3.3.3 Teorema (errore di ricostruzione nell'interpolazione polinomiale)

Siano k un numero intero non negativo, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non degenere, $t_0, \ldots, t_k$ istanti di campionamento *distinti* in I. *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione *con derivata* $(k+1)$*-esima continua* e p_k è il polinomio che interpola i campioni di f, ovvero i dati $(t_0, f(t_0)), \ldots, (t_k, f(t_k))$, *allora*:

$$\textit{Per ogni } t \in I \textit{ esiste } \theta \in I \textit{ tale che:} \qquad f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}\,(t - t_0)\cdots(t - t_k)$$

Se l'intervallo I è anche chiuso e limitato, posto $M_{k+1} = \max_{x \in I} |\, f^{(k+1)}(x)\,|$, *allora* per l'errore di ricostruzione relativo ad f si ha:

$$e(f) = \max_{t \in I} |\, f(t) - p_k(t)\,| = \max_{t \in I} \left| \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}\,(t - t_0)\cdots(t - t_k) \right| \leqslant \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}\,(\operatorname{mis} I)^{k+1}$$

Dimostrazione: Omessa.[36] Si osservi che l'espressione della differenza $f(t) - p_k(t)$ ricorda quella della *forma di Lagrange del resto* per la formula di Taylor. Si osservi anche che θ *dipende da* t (vedere l'Esercizio *E13*).

3.3.4 Esempio

(1) Siano $I = [0, 1]$ e $f(t) = e^{-t}$. La funzione f ha derivate di ordine comunque elevato e per ogni intero non negativo j si ha $M_j = \max_{x \in I} |\, f^{(j)}(x)\,| = 1$. Inoltre $\operatorname{mis} I = 1$, dunque dal Teorema precedente, scelti *comunque* $k + 1$ istanti di campionamento distinti:

$$e(f) \leqslant \frac{1}{(k+1)!}$$

Si ha inoltre:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{(k+1)!} = 0$$

e quindi $\lim_{k \to \infty} e(f) = 0$: *per ottenere un errore di ricostruzione piccolo quanto si vuole è sufficiente utilizzare un numero opportunamente elevato di istanti di campionamento.*

(2) Siano $I = [0, 2\pi]$, ω un numero reale positivo e $f(t) = \operatorname{sen} \omega t$. La funzione f ha derivate di ordine comunque elevato e per ogni intero non negativo j si ha $M_j = \omega^j$. Inoltre $\operatorname{mis} I = 2\pi$, dunque dal Teorema 3.3.3, scelti *comunque* $k + 1$ istanti di campionamento distinti:

$$e(f) \leqslant \frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Anche in questo caso si ha (vedere l'Esercizio *E14*):

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

e quindi $\lim_{k \to \infty} e(f) = 0$: *per ottenere un errore di ricostruzione piccolo quanto si vuole è sufficiente utilizzare un numero opportunamente elevato di istanti di campionamento.*

[36] Vedere: M. Ciampa, "Calcolo Numerico, a.a. 2011/2012," Teorema 4.12, p.109-110. Il testo è reperibile sulla pagina web del corso.

I due esempi illustrano l'asserto seguente: *Se* f ha derivate di ordine comunque elevato e la successione M_j è tale che:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} (\operatorname{mis} I)^{k+1} = 0$$

allora $\lim_{k\to\infty} e(f) = 0$ e *l'errore di ricostruzione può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo sufficientemente grande il numero degli istanti di campionamento, con l'unico vincolo che siano distinti.*

3.3.5 Esempio

Siano $I = [0,1]$, f la funzione continua definita da:

$$f(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e, per ogni numero intero k non negativo:

$$t_j = \frac{1}{j+1} \qquad j = 0,1,2,\ldots,k$$

gli istanti di campionamento. In questo caso il Teorema 3.3.3 non è utilizzabile (f non è derivabile per $t = 0$) ma: per ogni k e $j = 0,1,2,\ldots,k$ si ha $f(t_j) = 0$ e quindi per ogni numero intero k non negativo l'elemento $p_k \in P_k(\mathbb{R})$ che interpola i campioni di f, ovvero i dati $(t_0, 0), \ldots, (t_k, 0)$, è il *polinomio nullo.*[37] Dunque *per ogni* k si ha:

$$e(f) = \max_{t\in I} |\, f(t) - p_k(t)\,| = M_0 > 0$$

Per la funzione assegnata non è sufficiente aumentare il numero k *di istanti di campionamento per ottenere un errore di ricostruzione piccolo quanto si vuole.*

Questo esempio mostra che vi sono funzioni continue per le quali *non è sufficiente* utilizzare un numero di istanti di campionamento opportunamente elevato per ottenere un errore di ricostruzione piccolo quanto si vuole. In generale non solo il numero ma *anche il valore* degli istanti di campionamento ha un ruolo essenziale per rendere piccolo l'errore di ricostruzione.

3.3.6 Definizione (criterio di scelta degli istanti di campionamento)

Sia I un intervallo non degenere. Un *criterio di scelta degli istanti di campionamento in* I è *una funzione* che per ogni numero intero non negativo k restituisce un insieme di $k+1$ istanti di campionamento *distinti* in I.

3.3.7 Esempio

(a) Il criterio di scelta degli istanti di campionamento in $I = [0,1]$ utilizzato nell'Esempio 3.3.5 è definito per ogni numero intero non negativo k dall'insieme degli istanti:

$$t_j = \frac{1}{j+1} \qquad j = 0,1,2,\ldots,k$$

(b) Nel *campionamento uniforme* il criterio di scelta degli istanti di campionamento in $I = [a,b]$ è definito per ogni numero intero non negativo k dall'insieme degli istanti:

$$t_j = a + j\,\frac{b-a}{k} \qquad j = 0,1,2,\ldots,k$$

Sussistono gli asserti seguenti:

- *Per ogni* funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$, *esiste* un criterio di scelta degli istanti di campionamento in I tale che $\lim_{k\to\infty} e(f) = 0$;
- *Fissato* un criterio di scelta degli istanti di campionamento in I, *esiste* una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{k\to\infty} e(f) \neq 0$.

[37] Si osservi che questo accade perchè la funzione di ricostruzione è *lineare.*

Il primo asserto afferma che *in teoria* è possibile campionare e ricostruire con errore arbitrariamente piccolo *qualunque* funzione continua. Il secondo asserto afferma però che *non esiste* un criterio di scelta degli istanti di campionamento che garantisce un errore di ricostruzione arbitrariamente piccolo campionando *ogni* funzione continua.

3.3.8 Osservazione (Condizionamento della ricostruzione con interpolazione polinomiale)

Nel campionamento e ricostruzione di una funzione continua f, i campioni sono spesso ottenuti mediante un procedimento di *misura* dei valori di f agli istanti di campionamento $t_0, \dots, t_k$. Per tenere conto dell'effetto sulla ricostruzione di inevitabili *errori* nel procedimento di acquisizione dei campioni, si studia il *condizionamento* del problema della ricostruzione, ovvero la grandezza della variazione della funzione ricostruita in termini della grandezza degli errori sui campioni.

Siano I un intervallo chiuso e limitato non degenere, k un numero intero non negativo, $t_0, \dots, t_k$ istanti di campionamento *distinti* in I ed $r : \mathbb{R}^{k+1} \to C(I)$ una funzione di ricostruzione. Dato $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ sia $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ la *perturbazione* di componenti $\delta_0, \dots, \delta_k$ e si considerino le funzioni continue $r(y)$ e $r(y+\delta)$. Scelto di misurare la variazione della funzione ricostruita con:

$$\max_{t \in I} |\, r(y+\delta) - r(y)\, |$$

per la linearità della funzione di ricostruzione si ha:

$$\max_{t \in I} |\, r(y+\delta) - r(y)\, | = \max_{t \in I} |\, r(\delta)\, |$$

Nel caso di ricostruzione mediante interpolazione polinomiale, detti $\ell_0(t), \dots, \ell_k(t)$ gli elementi della base di Lagrange di $P_k(\mathbb{R})$ relativi agli istanti $t_0, \dots, t_k$, si ottiene:

$$|\, r(\delta)\, | = |\, \delta_0\, \ell_0(t) + \dots + \delta_k\, \ell_k(t)\, | \leqslant |\, \delta_0\, |\, |\, \ell_0(t)\, | + \dots + |\, \delta_k\, |\, |\, \ell_k(t)\, |$$

Introdotta la misura della perturbazione $\|\, \delta\, \|_\infty$ si deduce:

$$|\, \delta_0\, |\, |\, \ell_0(t)\, | + \dots + |\, \delta_k\, |\, |\, \ell_k(t)\, | \leqslant \|\, \delta\, \|_\infty \big(\, |\, \ell_0(t)\, | + \dots + |\, \ell_k(t)\, |\, \big)$$

da cui, posto:

$$\lambda(t_0, \dots, t_k) = \max_{t \in I} \big(\, |\, \ell_0(t)\, | + \dots + |\, \ell_k(t)\, |\, \big)$$

si ha:

$$\max_{t \in I} |\, r(y+\delta) - r(y)\, | \leqslant \lambda(t_0, \dots, t_k)\, \|\, \delta\, \|_\infty$$

La disuguaglianza *è la migliore possibile* nel senso che: *esiste* $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ *tale che*:

$$\max_{t \in I} |\, r(y+\delta) - r(y)\, | = \lambda(t_0, \dots, t_k)\, \|\, \delta\, \|_\infty$$

Infatti:

- Sia t^* tale che:

$$|\, \ell_0(t^*)\, | + \dots + |\, \ell_k(t^*)\, | = \max_{t \in I} \big(\, |\, \ell_0(t)\, | + \dots + |\, \ell_k(t)\, |\, \big) = \lambda(t_0, \dots, t_k)$$

- Scelto $\Delta > 0$, siano $\delta_0, \dots, \delta_k$ tali che:

$$|\, \delta_0\, | = \dots = |\, \delta_k\, | = \Delta \quad \text{e, per } j = 0, \dots, k\text{:} \quad \delta_j\, \ell_j(t^*) \geqslant 0$$

Allora, per ogni j, essendo $\delta_j\, \ell_j(t^*) \geqslant 0$ si ha: $\delta_j\, \ell_j(t^*) = |\, \delta_j\, \ell_j(t^*)\, | = \Delta\, |\, \ell_j(t^*)\, |$. Se ne deduce che:

$$\begin{aligned} |\, r(\delta)(t^*)\, | &= |\, \delta_0\, \ell_0(t^*) + \dots + \delta_k\, \ell_k(t^*)\, | = \delta_0\, \ell_0(t^*) + \dots + \delta_k\, \ell_k(t^*) = \\ &= |\, \delta_0\, \ell_0(t^*)\, | + \dots + |\, \delta_k\, \ell_k(t^*)\, | = \Delta \big(\, |\, \ell_0(t^*)\, | + \dots + |\, \ell_k(t^*)\, |\, \big) = \\ &= \|\, \delta\, \|_\infty\, \lambda(t_0, \dots, t_k) \end{aligned}$$

Dunque *il condizionamento del problema della ricostruzione mediante interpolazione polinomiale dipende dal valore del coefficiente* $\lambda(t_0, \dots, t_k)$. Sussiste il seguente asserto: *per ogni criterio di scelta degli istanti di campionamento si ha*:

$$\lambda(t_0, \dots, t_k) > \frac{\log(k+1)}{8\sqrt{\pi}}$$

Dunque: *il condizionamento peggiora all'aumentare del numero degli istanti di campionamento.*

Ci si trova, in pratica, di fronte a due *esigenze contrastanti*: scegliere k *abbastanza elevato* da garantire un basso errore di ricostruzione e scegliere k *non troppo elevato* per non rendere troppo cattive le proprietà di condizionamento della ricostruzione.

Esercizi

E13 Si consideri il Teorema 3.3.3. Dimostrare che: *se θ non dipende da t allora f è un polinomio di grado al più $k+1$.*

E14 Sia a un numero reale positivo e j la *parte intera superiore* di $2a$. Dimostrare che, posto:

$$N = \frac{a^j}{j!}$$

per ogni numero intero $k > j$ si ha:

$$\frac{a^k}{k!} = N \, \frac{a}{j+1} \cdots \frac{a}{k} < N \, (\tfrac{1}{2})^{k-j}$$

Ne segue:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a^k}{k!} = 0$$

E15 Si considerino i dati dell'Esempio 3.3.4 parte (1). Determinare k in modo che $e(f) < 10^{-3}$.

E16 Siano $I = [a, b]$ un intervallo non degenere e $\ell_0(t), \ell_1(t)$ la base di Lagrange di $P_1(\mathbb{R})$ relativa agli istanti di campionamento a, b. Determinare analiticamente:

$$\lambda(a, b) = \max_{t \in I} \big(\,|\, \ell_0(t) \,|\, + \,|\, \ell_1(t) \,|\, \big)$$

Siano poi $I = [0, 1]$ e $\ell_0(t), \ldots, \ell_3(t)$ la base di Lagrange $P_3(\mathbb{R})$ relativa agli istanti di campionamento $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. Utilizzare *Scilab* per ottenere, graficamente, una stima di:

$$\lambda(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1) = \max_{t \in I} \big(\,|\, \ell_0(t) \,|\, + \cdots + \,|\, \ell_3(t) \,|\, \big)$$

3.3.2 Ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti

Siano $I = [a, b]$ un intervallo non degenere, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ istanti di campionamento e, per $j = 1, \ldots, k$, $I_j = (t_{j-1}, t_j)$. Indichiamo con τ l'insieme aperto unione dei k intervalli $I_1, \ldots, I_k$.

Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è *lineare a tratti su τ* se per ogni $j = 1, \ldots, k$ esiste $p_j \in P_1(\mathbb{R})$ tale che $f = p_j$ su I_j. Il termine "lineare a tratti" fa riferimento al grafico di f su τ che, appunto, è unione di segmenti.

3.3.9 Definizione (spazio vettoriale delle funzioni continue e lineari a tratti)

Si indica con $S(\tau)$ l'insieme di *tutte* le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ *continue* e *lineari a tratti su τ*. Si verifica facilmente che $S(\tau)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

3.3.10 Osservazione

(a) Dati $y_0, \ldots, y_k \in \mathbb{R}$ esiste un solo elemento di $S(\tau)$ che interpola i dati $(t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$.

Infatti: Per $j = 1, \ldots, k$ sia p_j l'unico elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che interpola i dati (t_{j-1}, y_{j-1}), (t_j, y_j) e sia poi f la funzione continua tale che $f = p_1$ su $I_1, \ldots, f = p_k$ su I_k. Allora $f \in S(\tau)$ e $f(t_0) = y_0, \ldots, f(t_k) = y_k$. Sia inoltre g un altro elemento di $S(\tau)$ che interpola gli stessi dati. Allora $f - g \in S(\tau)$. Se fosse $f(t) - g(t) \neq 0$ per $t \in I_j$, detto q_j l'elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che coincide con $f - g$ su I_j, si avrebbe: (a) $q_j(t) \neq 0$ e quindi $q_j \neq 0$, e (b) q_j è l'unico elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che interpola i dati $(t_{j-1}, 0), (t_j, 0)$, ovvero $q_j = 0$: assurdo.

(b) Lo spazio $S(\tau)$ ha dimensione $k+1$.

Infatti: Per $i = 0, \ldots, k$, sia s_i l'elemento di $S(\tau)$ che vale *uno* in t_i e *zero* in tutti gli altri istanti di campionamento. Questi elementi sono univocamente determinati per quanto mostrato nel punto (a). Allora si ha:

– Se $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ sono coefficienti tali che $\phi = a_0 s_0 + \cdots + a_k s_k = 0$, allora $0 = \phi(t_0) = a_0$, $\ldots$, $0 = \phi(t_k) = a_k$: gli elementi $s_0, \ldots, s_k$ sono *linearmente indipendenti.*

– Sia $\sigma \in S(\tau)$. Si verifica che l'elemento $\sigma(t_0)\, s_0 + \cdots + \sigma(t_k)\, s_k \in S(\tau)$ interpola i dati $(t_0, \sigma(t_0)), \ldots, (t_k, \sigma(t_k))$. Ma anche σ interpola gli stessi dati. Per l'unicità stabilita nel punto (a) si ha:

$$\sigma = \sigma(t_0)\, s_0 + \cdots + \sigma(t_k)\, s_k$$

ovvero σ è una combinazione lineare di $s_0, \ldots, s_k$: gli elementi $s_0, \ldots, s_k$ sono *generatori di* $S(\tau)$.

Dunque: $s_0, \ldots, s_k$ sono una *base* di $S(\tau)$, che chiameremo *base canonica.*

(c) Il problema a cui si riferisce il punto (a) è *lineare di interpolazione.*

3.3.11 Osservazione (Ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti)

Sia c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \ldots, t_k$. Dette $y_0, \ldots, y_k$ le componenti di $y \in \mathbb{R}^{k+1}$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^{k+1} \to C(I)$ definita da:

$$\rho(y) = \text{l'elemento di } S(\tau) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$$

è una funzione di ricostruzione relativa a c.

Infatti: Utilizzando la base canonica di $S(\tau)$ si ha:

$$\rho(y) = y_0 s_0 + \cdots + y_k s_k$$

Allora si constata facilmente che ρ *è lineare*; inoltre, per definizione, $\rho(y)$ interpola i dati $(t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$.

3.3.12 Teorema (errore di ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti)

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione *con derivata seconda continua* e σ è l'elemento di $S(\tau)$ che interpola i campioni di f, ovvero i dati $(t_0, f(t_0)), \ldots, (t_k, f(t_k))$, posto $M_2 = \max_{x\in I} |\, f''(x)\,|$ e $h = \max\{\, \mathrm{mis}\, I_1, \ldots, \mathrm{mis}\, I_k \,\}$, *allora* per l'errore di ricostruzione relativo ad f si ha:

$$e(f) = \max_{t\in I} |\, f(t) - \sigma(t)\,| \leqslant \frac{M_2}{8}\, h^2$$

Dimostrazione: Per ogni $j = 1, \ldots, k$ esiste $p_j \in P_1(\mathbb{R})$ tale che $\sigma = p_j$ su I_j. Allora, dal Teorema 3.3.3 sull'errore di ricostruzione con interpolazione polinomiale, per $j = 1, \ldots, k$ si ha:[38]

$$\textit{Per ogni } t \in \bar{I}_j \textit{ esiste } \theta_j \in \bar{I}_j \textit{ tale che: } f(t) - \sigma(t) = f(t) - p_j(t) = \frac{f''(\theta_j)}{2}\,(t - t_{j-1})(t - t_j)$$

Per ogni $t \in \bar{I}_j$ si ha poi:

$$\left|\, \frac{f''(\theta_j)}{2}\,(t - t_{j-1})(t - t_j) \right| \leqslant \frac{M_2}{2} \max_{t\in \bar{I}_j} |\,(t - t_{j-1})(t - t_j)\,|$$

e:

$$\max_{t\in \bar{I}_j} |\,(t - t_{j-1})(t - t_j)\,| = \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{2} \right)^2 = \frac{(\mathrm{mis}\, I_j)^2}{4}$$

ovvero:

$$\left|\, \frac{f''(\theta_j)}{2}\,(t - t_{j-1})(t - t_j) \right| \leqslant \frac{M_2}{8}\,(\mathrm{mis}\, I_j)^2$$

Dunque:

$$\max_{t\in \bar{I}_j} |\, f(t) - \sigma(t)\,| \leqslant \frac{M_2}{8}\,(\mathrm{mis}\, I_j)^2$$

Infine:

$$e(f) = \max_{t\in I} |\, f(t) - \sigma(t)\,| = \max_j \max_{t\in \bar{I}_j} |\, f(t) - \sigma(t)\,| \leqslant \max_j \frac{M_2}{8}\,(\mathrm{mis}\, I_j)^2 = \frac{M_2}{8}\, h^2$$

[38] Se $J = (a, b)$ è un intervallo aperto, si indica con $\bar{J}$ la *chiusura* di J ovvero l'intervallo chiuso $[a, b]$.

Il Teorema 3.3.12 mostra che per la ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti si ha: *Se* f ha derivata seconda continua *allora* $\lim_{h\to 0} e(f) = 0$, ovvero: *per ottenere un errore di ricostruzione arbitrariamente piccolo è sufficiente utilizzare un insieme di istanti di campionamento con* h *opportunamente piccolo.*

3.3.13 Esempio

(a) Sia $[a, b]$ un intervallo non degenere. Per il criterio di scelta degli istanti di campionamento del *campionamento uniforme* (Esempio 3.3.7 punto (b)) si ha:

$$h = \frac{b-a}{k}$$

Dunque è possibile ottenere h piccolo quanto si vuole scegliendo il numero di istanti di campionamento $k+1$ opportunamente grande.

(b) Sia $[a, b] = [0, 1]$ e si consideri il criterio di scelta degli istanti di campionamento definito per ogni numero intero k da:

$$t_j = \frac{j}{j+1} \quad \text{per } j = 0, \ldots, k-1 \quad \text{e} \quad t_k = 1$$

Allora:

$$h = \begin{cases} 1 \text{ per } k = 1 \\ \frac{1}{2} \text{ per } k > 1 \end{cases}$$

Questo criterio di scelta degli istanti di campionamento *non consente* di ottenere $h < \frac{1}{2}$.

3.3.14 Esempio

Siano $f(t) = \operatorname{sen} t$ e $I = [0, 2\pi]$. Poiché $M_2 = 1$, utilizzando il criterio di scelta degli istanti di campionamento in I del *campionamento uniforme* si ha:

$$e(f) \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2$$

Per ottenere un errore di ricostruzione non superiore a 10^{-n}, n numero intero positivo, è sufficiente scegliere k tale che:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \leqslant 10^{-n}$$

ovvero:

$$k^2 \geqslant \frac{1}{8}\,\frac{4\pi^2}{10^{-n}}$$

e quindi:

$$k \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{8}}\sqrt{10^n}$$

3.3.15 Osservazione (Condizionamento della ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti)

Procedendo come nell'analoga Osservazione 3.3.8 e con le medesime notazioni, nel caso di ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti, utilizzando la base canonica di $S(\tau)$ si ottiene:

$$|\, r(\delta)\,| = |\, \delta_0 s_0(t) + \cdots + \delta_k s_k(t)\,| \leqslant |\,\delta_0\,|\,|\,s_0(t)\,| + \cdots + |\,\delta_k\,|\,|\,s_k(t)\,|$$

Introdotta la misura della perturbazione $\|\,\delta\,\|_\infty$ si deduce:

$$|\,\delta_0\,|\,|\,s_0(t)\,| + \cdots + |\,\delta_k\,|\,|\,s_k(t)\,| \leqslant \|\,\delta\,\|_\infty\big(\,|\,s_0(t)\,| + \cdots + |\,s_k(t)\,|\,\big)$$

Ma per ogni $t \in I$ e $j = 0, \ldots, k$ si ha: $s_j(t) \geqslant 0$, dunque:

$$|\,s_0(t)\,| + \cdots + |\,s_k(t)\,| = s_0(t) + \cdots + s_k(t)$$

e si constata inoltre che:

$$s_0(t) + \cdots + s_k(t) = 1$$

Allora:

$$\max_{t \in I} |\, r(y+\delta) - r(y)\,| = \max_{t \in I} |\, r(\delta)\,| \leqslant \|\, \delta\,\|_\infty$$

Questa disuguaglianza mostra che *il condizionamento del problema della ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti è sempre buono.*

Esercizi

E17 Sia $I = [0, 2]$, $\tau = (0, 1) \cup (1, 2)$ e $f : I \to \mathbb{R}$ la funzione continua e lineare a tratti definita da:

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{per } t \in (0,1) \\ 3-t & \text{per } t \in (1,2) \end{cases}$$

Determinare $f(0), f(1)$ e $f(2)$.

E18 Siano $I = [0, 1]$ e $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1$ gli istanti di campionamento. Determinare gli elementi $\sigma \in S(\tau)$ che verificano le condizioni:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sigma(x)\, dx = 0 \quad , \quad \sigma(0) = 1 \quad , \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \sigma(x)\, dx = -1$$

E19 Siano $I = [0, 4]$ e $\tau = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$. Detta $s_0, \ldots, s_4$ la base canonica di $S(\tau)$, disegnare il grafico di $\sigma = 4s_0 - s_1 + 2s_2 + s_3 - 2s_4$.

E20 ★ Dimostrare che *la disuguaglianza finale dell'Osservazione 3.3.15 è la migliore possibile* nel senso che: *esiste* $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ *tale che*:

$$\max_{t \in I} |\, r(y+\delta) - r(y)\,| = \|\, \delta\,\|_\infty$$

E21 Siano $I = [0, 1]$ e $f(t) = e^{-t}$. Scelto di utilizzare il campionamento uniforme e la ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti, determinare il numero di istanti di campionamento in modo che $e(f) < 10^{-3}$. Confrontare la risposta con quella dell'Esercizio *E15*. Discutere il risultato del confronto.
