

3 Interpolazione

Se $\Omega \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, si indica con $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale su \mathbb{R} delle funzioni continue da Ω in \mathbb{R} .

3.1 Interpolazione polinomiale

Siano k un numero intero non negativo, $P_k(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale su \mathbb{R} dei polinomi a coefficienti reali di grado al più k (che consideriamo come sottospazio di $C(\mathbb{R})$) x_0, \dots, x_k numeri reali distinti³⁶ e y_0, \dots, y_k numeri reali. Il problema dell'interpolazione polinomiale consiste nel determinare gli elementi $p \in P_k(\mathbb{R})$ che interpolano i dati:

$$(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$$

ovvero tali che:

$$p(x_0) = y_0, \dots, p(x_k) = y_k$$

3.1.1 Osservazione

Si consideri il problema di interpolazione polinomiale di determinare gli elementi di $P_k(\mathbb{R})$ che interpolano i dati: $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$. Si ha:

(a) *Interpretazione geometrica*

Considerati i dati $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ come coordinate di $k+1$ punti in un piano cartesiano, il problema dell'interpolazione polinomiale consiste nel determinare gli elementi di $P_k(\mathbb{R})$ il cui grafico contiene tutti i punti assegnati.

(b) *Riformulazione*

Ricordato che lo spazio vettoriale $P_k(\mathbb{R})$ ha dimensione $k+1$, sia $q_0(x), \dots, q_k(x)$ una sua base. Allora: $p(x) = a_0q_0(x) + \dots + a_kq_k(x)$ è soluzione del problema di interpolazione polinomiale se e solo se:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0q_0(x_0) + \dots + a_kq_k(x_0) = y_0 \\ &\vdots \\ p(x_k) &= a_0q_0(x_k) + \dots + a_kq_k(x_k) = y_k \end{aligned}$$

ovvero se e solo se la colonna dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

è soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \dots & q_k(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_0(x_k) & q_1(x_k) & \dots & q_k(x_k) \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

Si osservi che si ottengono tante equazioni quante sono le condizioni richieste a $p(x)$ e il numero di incognite è pari alla dimensione di $P_k(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $q_0(x), \dots, q_k(x)$ è una base di $P_k(\mathbb{R})$, l'insieme delle soluzioni del problema di interpolazione polinomiale e quello delle soluzioni del sistema di equazioni lineari sono in corrispondenza biunivoca.

3.1.2 Teorema (di esistenza ed unicità della soluzione)

Per ogni k numero intero non negativo, x_0, \dots, x_k numeri reali distinti e y_0, \dots, y_k numeri reali, esiste un solo elemento in $P_k(\mathbb{R})$ che interpola i dati $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$.

Dimostrazione. Siano $\ell_0(x), \dots, \ell_k(x)$ gli elementi di $P_k(\mathbb{R})$ definiti da:

$$\ell_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_k)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}, \quad j = 0, \dots, k$$

Si osservi che per ogni j si ha:

³⁶Ovvero: $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$

(a) $\ell_j(x_j) = 1$

(b) se $i \neq j$ allora $\ell_j(x_i) = 0$

I $k+1$ polinomi $\ell_0(x), \dots, \ell_k(x)$ sono *linearmente indipendenti*. Infatti, se a_0, \dots, a_k sono coefficienti tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$a_0\ell_0(x) + \dots + a_k\ell_k(x) = 0$$

allora per $j = 0, \dots, k$ si ha:

$$0 = a_0\ell_0(x_j) + \dots + a_k\ell_k(x_j) = a_j$$

Dunque $\ell_0(x), \dots, \ell_k(x)$ sono una *base* di $P_k(\mathbb{R})$ detta *base di Lagrange* relativa ai punti x_0, \dots, x_k . Inoltre:

$$\begin{bmatrix} \ell_0(x_0) & \ell_1(x_0) & \dots & \ell_k(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_0(x_k) & \ell_1(x_k) & \dots & \ell_k(x_k) \end{bmatrix} = I$$

Per quanto detto nel punto (b) dell'Osservazione 3.1.1, il problema di interpolazione polinomiale ha *una ed una sola soluzione*:

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + \dots + y_k\ell_k(x)$$

L'espressione trovata prende il nome di *forma di Lagrange del polinomio interpolante*.

3.1.3 Esercizio

Determinare l'elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati: $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$.

Soluzione.

Numerati i dati nell'ordine delle ascisse crescenti, la *base di Lagrange* di $P_2(\mathbb{R})$ relativa ai punti x_0, x_1, x_2 è:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{1}{3}(x^2 - 2x) \quad , \quad \ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$$

e:

$$\ell_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{1}{6}(x^2 + x)$$

La *forma di Lagrange* dell'elemento cercato è allora:

$$p(x) = 0 \cdot \ell_0(x) + 1 \cdot \ell_1(x) - 2 \cdot \ell_2(x)$$

Lo stesso elemento può essere individuato utilizzando la più usuale *base di Vandermonde* di $P_2(\mathbb{R})$:

$$1, x, x^2$$

In questo caso il sistema di equazioni a cui si riducono le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ottiene l'elemento cercato in *forma di Vandermonde*:

$$p(x) = 1 \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot x - \frac{5}{6} \cdot x^2$$

3.1.4 Osservazione (forma di Newton del polinomio interpolante)

La scelta della base di $P_k(\mathbb{R})$ non fa cambiare la soluzione del problema di interpolazione in esame ma può agevolarne o meno la determinazione. La *base di Lagrange*, di non immediata manipolazione, genera il sistema di equazioni lineari *più semplice* da risolvere per la determinazione dei coefficienti perché la matrice del sistema è I . La più usuale *base di Vandermonde*, invece, genera un sistema di equazioni *non semplice* da risolvere perché la matrice del sistema è la *matrice di Vandermonde*

(vedere l'Esercizio E2) e la soluzione del sistema richiede la sua fattorizzazione. Una terza scelta è la *base di Newton* relativa ai punti x_0, \dots, x_{k-1} :

$$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$$

Gli elementi di questa base sono polinomi *di grado crescente* e le condizioni di interpolazione si traducono in un sistema di equazioni lineari con *matrice triangolare inferiore*, dunque semplice da risolvere.

3.1.5 Esercizio

Assegnati i dati $(0, 1), (-1, 2), (3, 10), (1, 10)$:

- Determinare la *forma di Newton* del polinomio interpolante utilizzando i dati nell'ordine in cui sono stati assegnati;
- Determinare la forma di Newton del polinomio interpolante ordinando i dati secondo ascisse crescenti;
- Calcolare il *valore* del polinomio interpolante in $-1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Soluzione.

(a) Sono stati assegnati quattro dati, dunque $k = 3$. Utilizzando i dati nell'ordine in cui sono stati assegnati la *base di Newton* di $P_3(\mathbb{R})$ risulta:

$$1, x, x(x+1), x(x+1)(x-3)$$

Le condizioni di interpolazione si traducono nel sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La soluzione b del sistema si ottiene con la procedura SA:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow p(x) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot x + 1 \cdot x(x+1) - 2 \cdot x(x+1)(x-3)$$

(b) *Lasciata al lettore.*

(c) Un procedimento per calcolare il valore di p in $a \in \mathbb{R}$ è, dette x_0, \dots, x_k le ascisse dei dati nell'ordine considerato e b la colonna di componenti i coefficienti b_0, \dots, b_k :

$$(1) r_0 = 1; r_1 = a - x_0; \text{ per } j = 2, \dots, k \text{ ripeti } r_j = r_{j-1}(a - x_{j-1});$$

$$(2) r = (r_0, \dots, r_k); p(a) = r b$$

In (1) si calcolano i valori degli elementi della base di Newton in a , in (2) si calcola il valore in a della combinazione lineare che realizza il polinomio interpolante. La procedura richiede $2k$ somme e $2k - 1$ prodotti. Per il calcolo in m punti sono richieste $2mk$ somme e $2m(k - 1)$ prodotti e quindi il costo del calcolo è: $(4k - 1)m$. Nel caso in esame si ottiene:

$$\begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \\ p(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 4 & 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 17 \\ 10 \\ -23 \end{bmatrix}$$

E1 Verificare che le due forme, di *Lagrange* e *Vandermonde*, dell'elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati dell'Esercizio 3.1.3 individuano lo stesso polinomio.

E2 Siano k un numero intero non negativo e $1, \dots, x^k$ la *base di Vandermonde* di $P_k(\mathbb{R})$. Assegnati x_0, \dots, x_k numeri reali *distinti* e y_0, \dots, y_k numeri reali, verificare che il sistema di equazioni lineari a cui si riducono le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^k \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

In base al Teorema di esistenza ed unicità della soluzione, la matrice del sistema, nota come *matrice di Vandermonde* relativa ai punti x_0, \dots, x_k , è *invertibile*.

E3 ♠ Realizzare in *Scilab* una procedura che *dati* un vettore a di componenti a_1, \dots, a_m e due vettori x e b di componenti x_0, \dots, x_k e, rispettivamente, b_0, \dots, b_k , *restituisce* il vettore p di componente j -esima:

$$p_j = b_0 + b_1(a_j - x_0) + \cdots + b_k(a_j - x_0) \cdots (a_j - x_{k-1}) \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

Utilizzare poi la procedura per disegnare, su uno stesso piano cartesiano, in rosso *il grafico* del polinomio del punto (a) dell'Esercizio 3.1.5 e con *crochette i dati* interpolati.

E4 Dopo aver rappresentato i dati $(0, 0), (1, 1), (3, 3), (4, 4)$ su un piano cartesiano, determinare la forma di *Vandermonde* e la forma di *Newton del* polinomio interpolante.

E5 ★ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = Q(n)$$

con $Q \in P_3(\mathbb{R})$. Determinare la forma di *Newton* di Q e dedurne la forma di *Vandermonde*.

3.2 Problema lineare di interpolazione

Siano F un sottospazio vettoriale di $C(\mathbb{R})$ di dimensione *finita* d , L_0, \dots, L_k applicazioni lineari da F in \mathbb{R} e y_0, \dots, y_k numeri reali. Il *problema lineare di interpolazione* consiste nel *determinare* gli elementi $f \in F$ che verificano le condizioni:

$$L_0(f) = y_0, \dots, L_k(f) = y_k$$

3.2.1 Esempio

(1) Il problema di interpolazione polinomiale definito da k, x_0, \dots, x_k e y_0, \dots, y_k è il problema lineare di interpolazione definito da: $F = P_k(\mathbb{R})$, $L_0(f) = f(x_0), \dots, L_k(f) = f(x_k)$ e y_0, \dots, y_k .

Infatti: $P_k(\mathbb{R})$ è un sottospazio di $C(\mathbb{R})$ di dimensione finita e per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione $L : P_k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $L(p) = p(a)$ è tale che:

$$p, q \in P_k(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad L(p+q) = (p+q)(a) = p(a) + q(a) = L(p) + L(q)$$

e:

$$p \in P_k(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad L(\alpha p) = (\alpha p)(a) = \alpha p(a) = \alpha L(p)$$

ovvero è *lineare*.

(2) Il problema lineare di interpolazione definito da $F = P_3(\mathbb{R})$, $L_0(p) = p(0)$, $L_1(p) = p(2)$ e $y_0 = 2, y_1 = -6$ non è un problema di interpolazione polinomiale.

Infatti: Si cercano in $P_3(\mathbb{R})$, spazio vettoriale di dimensione *quattro*, elementi che verificano *solo due* condizioni di interpolazione. In particolare, al problema in esame *non si applica* il Teorema 3.1.2 di esistenza ed unicità.

(3) Il problema lineare di interpolazione definito da $F = P_2(\mathbb{R})$, $L_0(p) = p(0)$,

$$L_1(p) = \int_0^1 p(\theta) d\theta$$

$L_2(p) = p'(0)$ e $y_0 = 2, y_1 = -6, y_2 = 4$ non è un problema di interpolazione polinomiale.

Infatti: Si cercano in $P_2(\mathbb{R})$, spazio vettoriale di dimensione tre, elementi che verificano tre condizioni *ma non tutte del tipo richiesto dal problema di interpolazione polinomiale*.

Si osservi che assegnati numeri reali a, b tali che $a < b$, l'applicazione $L : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$L(p) = \int_a^b p(\theta) d\theta$$

è lineare, come pure, per ogni intero positivo j , quella definita da:

$$L(p) = p^{(j)}(a)$$

(4) Il problema lineare di interpolazione definito da $F = \text{span}\{1, \text{sen } x, \cos x\}$, $L_0(f) = f(\pi)$,

$$L_1(f) = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

e $y_0 = 2, y_1 = -6$ non è un problema di interpolazione polinomiale.

Si osservi che le funzioni $1, \text{sen } x$ e $\cos x$, sono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} *linearmente indipendenti*: se $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sono tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $a_1 + a_2 \text{sen } x + a_3 \cos x = 0$ allora $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

3.2.2 Osservazione (Riformulazione di un problema lineare di interpolazione)

Ricordato che lo spazio vettoriale F ha dimensione d , sia $b_1(x), \dots, b_d(x)$ una sua *base*. Allora: $g(x) = a_1 b_1(x) + \dots + a_d b_d(x)$ è *soluzione del problema lineare di interpolazione* se e solo se:

$$\begin{aligned} L_0(g) &= a_1 L_0(b_1) + \dots + a_d L_0(b_d) = y_0 \\ &\vdots \\ L_k(g) &= a_1 L_k(b_1) + \dots + a_d L_k(b_k) = y_k \end{aligned}$$

ovvero *se e solo se la colonna dei coefficienti*:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

è *soluzione del sistema di equazioni lineari*:

$$\begin{bmatrix} L_0(b_1) & L_0(b_2) & \dots & L_0(b_d) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_k(b_1) & L_k(b_2) & \dots & L_k(b_d) \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

Si osservi che si ottengono $k+1$ equazioni (*tante quante sono le condizioni* richieste a g) e il numero di incognite è d (*pari alla dimensione di F*), ovvero la matrice del sistema è $(k+1) \times d$. Inoltre, poiché $b_1(x), \dots, b_d(x)$ è una base di F , l'insieme delle soluzioni del problema lineare di interpolazione e quello delle soluzioni del sistema di equazioni lineari sono in *corrispondenza biunivoca*.

3.2.3 Esempio

Determinare gli elementi di $P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(1) = 2 \quad , \quad \int_0^6 p(t) dt = 0$$

Soluzione

Si verifica che il problema posto è lineare di interpolazione, dunque risolubile studiando un sistema di equazioni lineari. Il sistema risulta di *due equazioni* in *tre incognite* quindi il problema può avere *zero* soluzioni oppure *infinite*.

Si consideri la base di Newton di $P_2(\mathbb{R})$:

$$1, x - 1, (x - 1)x$$

Le condizioni si traducono nel sistema di *due equazioni* in *tre incognite*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 54 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dunque le (infinite) soluzioni del problema lineare di interpolazione sono:

$$p_t(x) = 2 \cdot 1 - (1 + 2t) \cdot (x - 1) - 2t \cdot (x - 1)x, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esercizi

E6 Studiare i problemi lineari di interpolazione proposti nell'Esempio 3.2.1, punti (2), (3) e (4).

E7 Determinare gli elementi $p \in P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = 0, \quad p(1) = 1$$

Sia q uno di essi. Dimostrare che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ q(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la funzione derivata prima è continua.

E8 ★ Sia T un numero reale positivo. Per ogni funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed ogni numero reale x sia:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_x^{x+T} f(t) dt$$

il *valor medio* di f sull'intervallo $[x, x + T]$.

- (a) Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'applicazione $L : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $L(f) = \bar{f}(x)$ è *lineare* su \mathbb{R} .
- (b) Assegnati numeri reali y_0 e y_1 , determinare gli elementi $p \in P_1(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$\bar{p}(0) = y_0, \quad \bar{p}(1) = y_1$$

3.3 Campionamento e ricostruzione

Alcuni interessanti problemi lineari di interpolazione hanno origine dal problema della *ricostruzione* di una funzione continua a partire da un insieme assegnato di suoi valori, detti *campioni*.³⁷

Siano k un numero intero non negativo, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non degenere e t_0, \dots, t_k numeri reali *distinti* in I . La funzione $c : C(I) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ definita da:

$$c(f) = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_k) \end{bmatrix}$$

si chiama *funzione di campionamento agli istanti* (di campionamento) t_0, \dots, t_k . L'applicazione c risulta *lineare e non invertibile*.

Un'applicazione *lineare* $r : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow C(I)$ tale che:

$$\text{per ogni } y \in \mathbb{R}^{k+1} \text{ si ha: } r(y) = y$$

ovvero tale che $r(y)$ *interpola i dati* $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$, si chiama *funzione di ricostruzione* (relativa a c).

3.3.1 Esempio (ricostruzione mediante interpolazione polinomiale)

Sia c la funzione di campionamento agli istanti t_0, \dots, t_k . Dette y_0, \dots, y_k le componenti di $y \in \mathbb{R}^{k+1}$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow C(\mathbb{R})$ definita da:

$$\rho(y) = \text{l'elemento di } P_k(\mathbb{R}) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$$

è una funzione di ricostruzione relativa a c , dunque *esistono* funzioni di ricostruzione relative a c .

Infatti: Utilizzando la *forma di Lagrange* del polinomio interpolante si constata che ρ è *lineare*; inoltre, per definizione, $\rho(y)$ interpola i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$.

Si è osservato che la funzione di campionamento c *non è invertibile* dunque, scelta comunque una funzione di ricostruzione r , esistono funzioni continue f tali che: $r(c(f)) \neq f$. Per *misurare* quanto diverse sono f e $r(c(f))$ si adotta la definizione seguente:

3.3.2 Definizione (errore di ricostruzione)

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo *limitato* non degenere, c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \dots, t_k \in I$, r una funzione di ricostruzione relativa a c e $f \in C(I)$. Il numero reale non negativo:

$$e(f) = \max_{t \in I} |f(t) - r(c(f))(t)|$$

si chiama *errore di ricostruzione* di f . Si osservi che $e(f) = 0$ se e solo se $f = r(c(f))$.

Il *problema del campionamento e ricostruzione* consiste nel *determinare condizioni sufficienti a garantire un errore di ricostruzione soddisfacentemente piccolo*.

Esercizi

E9 Siano $t_0 = 0, t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ istanti di campionamento in $I = [0, 2]$ e c la funzione di campionamento a tali istanti. Studiare il seguente problema lineare di interpolazione: determinare gli elementi $p \in P_3(\mathbb{R})$ tali che $c(p) = 0$.

E10 Si considerino la funzione c di campionamento agli istanti t_0, t_1, t_2 e, dette y_0, y_1, y_2 le componenti di $y \in \mathbb{R}^3$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow C(\mathbb{R})$ definita da:

$$\rho(y) = \text{l'elemento di } P_2(\mathbb{R}) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2)$$

Dimostrare che assegnati $z, w \in \mathbb{R}^3$ si ha:

$$\rho(3z + 7w) = 3\rho(z) + 7\rho(w)$$

³⁷Si pensi, ad esempio, alla registrazione e riproduzione di un brano musicale con tecniche *digitali*.

E11 Siano $t_0 = 0, t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ istanti di campionamento in $I = [0, 2]$, c la funzione di campionamento a tali istanti e e_1, e_2, e_3 gli elementi della base canonica di \mathbb{R}^3 . Per $k = 1, 2, 3$ determinare l'elemento $p_k \in P_2(\mathbb{R})$ tale che $c(p) = e_k$.

E12 ★ Siano $t_0 = 0, t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ istanti di campionamento in $I = [0, 2]$ e $c : C(I) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione di campionamento a tali istanti. Detta c_* la *restrizione* di c a $P_2(\mathbb{R})$, dimostrare che la funzione di ricostruzione mediante interpolazione polinomiale definita nell'Esempio 3.3.1 è la *funzione inversa* di c_* .

3.3.1 Ricostruzione con interpolazione polinomiale

Si consideri la funzione di ricostruzione mediante interpolazione polinomiale definita nell'Esempio 3.3.1. Si ha:

3.3.3 Teorema (errore di ricostruzione nell'interpolazione polinomiale)

Siano k un numero intero non negativo, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non degenere, t_0, \dots, t_k istanti di campionamento *distinti* in I . Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione *con derivata $(k+1)$ -esima continua* e p_k è il polinomio che interpola i campioni di f , ovvero i dati $(t_0, f(t_0)), \dots, (t_k, f(t_k))$, allora:

$$\text{Per ogni } t \in I \text{ esiste } \theta \in I \text{ tale che: } f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} (t - t_0) \cdots (t - t_k)$$

Se l'intervallo I è anche chiuso e limitato, posto $M_{k+1} = \max_{x \in I} |f^{(k+1)}(x)|$, allora per l'errore di ricostruzione relativo ad f si ha:

$$e(f) = \max_{t \in I} |f(t) - p_k(t)| = \max_{t \in I} \left| \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} (t - t_0) \cdots (t - t_k) \right| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} (\text{mis } I)^{k+1}$$

Dimostrazione: Omessa.³⁸ Si osservi che l'espressione della differenza $f(t) - p_k(t)$ ricorda quella della *forma di Lagrange del resto* per la formula di Taylor. Si osservi anche che θ dipende da t (vedere l'Esercizio E13).

3.3.4 Esempio

(1) Siano $I = [0, 1]$ e $f(t) = e^{-t}$. La funzione f ha derivate di ordine comunque elevato e per ogni intero non negativo j si ha $M_j = \max_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = 1$. Inoltre $\text{mis } I = 1$, dunque dal Teorema precedente, scelti *comunque* $k+1$ istanti di campionamento distinti:

$$e(f) \leq \frac{1}{(k+1)!}$$

Si ha inoltre:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)!} = 0$$

e quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} e(f) = 0$: per ottenere un errore di ricostruzione piccolo quanto si vuole è sufficiente utilizzare un numero opportunamente elevato di istanti di campionamento.

(2) Siano $I = [0, 2\pi]$, ω un numero reale positivo e $f(t) = \sin \omega t$. La funzione f ha derivate di ordine comunque elevato e per ogni intero non negativo j si ha $M_j = \omega^j$. Inoltre $\text{mis } I = 2\pi$, dunque dal Teorema 3.3.3, scelti *comunque* $k+1$ istanti di campionamento distinti:

$$e(f) \leq \frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Anche in questo caso si ha (vedere l'Esercizio E14):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

e quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} e(f) = 0$: per ottenere un errore di ricostruzione piccolo quanto si vuole è sufficiente utilizzare un numero opportunamente elevato di istanti di campionamento.

³⁸Vedere: M. Ciampa, "Calcolo Numerico, a.a. 2011/2012," Teorema 4.12, p.109-110. Il testo è reperibile sulla pagina web del corso.

I due esempi illustrano l'asserto seguente: Se f ha derivate di ordine comunque elevato e la successione M_j è tale che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} (\text{mis } I)^{k+1} = 0$$

allora $\lim_{k \rightarrow \infty} e(f) = 0$ e l'errore di ricostruzione può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo sufficientemente grande il numero degli istanti di campionamento, con l'unico vincolo che siano distinti.

3.3.5 Esempio

Siano $I = [0, 1]$, f la funzione continua definita da:

$$f(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e, per ogni numero intero k non negativo:

$$t_j = \frac{1}{j+1} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k$$

gli istanti di campionamento. In questo caso il Teorema 3.3.3 non è utilizzabile (f non è derivabile per $t = 0$) ma: per ogni k e $j = 0, 1, 2, \dots, k$ si ha $f(t_j) = 0$ e quindi per ogni numero intero k non negativo l'elemento $p_k \in P_k(\mathbb{R})$ che interpola i campioni di f , ovvero i dati $(t_0, 0), \dots, (t_k, 0)$, è il polinomio nullo.³⁹ Dunque per ogni k si ha:

$$e(f) = \max_{t \in I} |f(t) - p_k(t)| = M_0 > 0$$

Per la funzione assegnata non è sufficiente aumentare il numero k di istanti di campionamento per ottenere un errore di ricostruzione piccolo quanto si vuole.

Questo esempio mostra che vi sono funzioni continue per le quali non è sufficiente utilizzare un numero di istanti di campionamento opportunamente elevato per ottenere un errore di ricostruzione piccolo quanto si vuole. In generale non solo il numero ma anche il valore degli istanti di campionamento ha un ruolo essenziale per rendere piccolo l'errore di ricostruzione.

3.3.6 Definizione (criterio di scelta degli istanti di campionamento)

Sia I un intervallo non degenere. Un criterio di scelta degli istanti di campionamento in I è una funzione che per ogni numero intero non negativo k restituisce un insieme di $k+1$ istanti di campionamento distinti in I .

3.3.7 Esempio

(a) Il criterio di scelta degli istanti di campionamento in $I = [0, 1]$ utilizzato nell'Esempio 3.3.5 è definito per ogni numero intero non negativo k dall'insieme degli istanti:

$$t_j = \frac{1}{j+1} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k$$

(b) Nel campionamento uniforme il criterio di scelta degli istanti di campionamento in $I = [a, b]$ è definito per ogni numero intero non negativo k dall'insieme degli istanti:

$$t_j = a + j \frac{b-a}{k} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k$$

Sussistono gli asserti seguenti:

- Per ogni funzione continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, esiste un criterio di scelta degli istanti di campionamento in I tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} e(f) = 0$;
- Fissato un criterio di scelta degli istanti di campionamento in I , esiste una funzione continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} e(f) \neq 0$.

³⁹Si osservi che questo accade perchè la funzione di ricostruzione è lineare.

Il primo asserto afferma che *in teoria* è possibile campionare e ricostruire con errore arbitrariamente piccolo *qualunque* funzione continua. Il secondo asserto afferma però che *non esiste* un criterio di scelta degli istanti di campionamento che garantisce un errore di ricostruzione arbitrariamente piccolo campionando *ogni* funzione continua.

3.3.8 Osservazione (Condizionamento della ricostruzione con interpolazione polinomiale)

Nel campionamento e ricostruzione di una funzione continua f , i campioni sono spesso ottenuti mediante un procedimento di *misura* dei valori di f agli istanti di campionamento t_0, \dots, t_k . Per tenere conto dell'effetto sulla ricostruzione di inevitabili *errori* nel procedimento di acquisizione dei campioni, si studia il *condizionamento* del problema della ricostruzione, ovvero la grandezza della variazione della funzione ricostruita in termini della grandezza degli errori sui campioni.

Siano I un intervallo chiuso e limitato non degenerare, k un numero intero non negativo, t_0, \dots, t_k istanti di campionamento *distinti* in I ed $r : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow C(I)$ una funzione di ricostruzione. Dato $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ sia $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ la *perturbazione* di componenti $\delta_0, \dots, \delta_k$ e si considerino le funzioni continue $r(y)$ e $r(y + \delta)$. Scelto di misurare la variazione della funzione ricostruita con:

$$\max_{t \in I} |r(y + \delta) - r(y)|$$

per la linearità della funzione di ricostruzione si ha:

$$\max_{t \in I} |r(y + \delta) - r(y)| = \max_{t \in I} |r(\delta)|$$

Nel caso di ricostruzione mediante interpolazione polinomiale, detti $\ell_0(t), \dots, \ell_k(t)$ gli elementi della base di Lagrange di $P_k(\mathbb{R})$ relativi agli istanti t_0, \dots, t_k , si ottiene:

$$|r(\delta)| = |\delta_0 \ell_0(t) + \dots + \delta_k \ell_k(t)| \leq |\delta_0| |\ell_0(t)| + \dots + |\delta_k| |\ell_k(t)|$$

Introdotta la misura della perturbazione $\|\delta\|_\infty$ si deduce:

$$|\delta_0| |\ell_0(t)| + \dots + |\delta_k| |\ell_k(t)| \leq \|\delta\|_\infty (|\ell_0(t)| + \dots + |\ell_k(t)|)$$

da cui, posto:

$$\lambda(t_0, \dots, t_k) = \max_{t \in I} (|\ell_0(t)| + \dots + |\ell_k(t)|)$$

si ha:

$$\max_{t \in I} |r(y + \delta) - r(y)| \leq \lambda(t_0, \dots, t_k) \|\delta\|_\infty$$

La disuguaglianza è *la migliore possibile* nel senso che: *esiste* $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ *tale che*:

$$\max_{t \in I} |r(y + \delta) - r(y)| = \lambda(t_0, \dots, t_k) \|\delta\|_\infty$$

Infatti:

– Sia t^* tale che:

$$|\ell_0(t^*)| + \dots + |\ell_k(t^*)| = \max_{t \in I} (|\ell_0(t)| + \dots + |\ell_k(t)|) = \lambda(t_0, \dots, t_k)$$

– Scelto $\Delta > 0$, siano $\delta_0, \dots, \delta_k$ tali che:

$$|\delta_0| = \dots = |\delta_k| = \Delta \quad \text{e, per } j = 0, \dots, k: \quad \delta_j \ell_j(t^*) \geq 0$$

Allora, per ogni j , essendo $\delta_j \ell_j(t^*) \geq 0$ si ha: $\delta_j \ell_j(t^*) = |\delta_j \ell_j(t^*)| = \Delta |\ell_j(t^*)|$. Se ne deduce che:

$$\begin{aligned} |r(\delta)(t^*)| &= |\delta_0 \ell_0(t^*) + \dots + \delta_k \ell_k(t^*)| = \delta_0 \ell_0(t^*) + \dots + \delta_k \ell_k(t^*) = \\ &= |\delta_0 \ell_0(t^*)| + \dots + |\delta_k \ell_k(t^*)| = \Delta (|\ell_0(t^*)| + \dots + |\ell_k(t^*)|) = \\ &= \|\delta\|_\infty \lambda(t_0, \dots, t_k) \end{aligned}$$

Dunque *il condizionamento del problema della ricostruzione mediante interpolazione polinomiale dipende dal valore del coefficiente* $\lambda(t_0, \dots, t_k)$. Sussiste il seguente asserto: *per ogni criterio di scelta degli istanti di campionamento si ha*:

$$\lambda(t_0, \dots, t_k) > \frac{\log(k+1)}{8\sqrt{\pi}}$$

Dunque: *il condizionamento peggiora all'aumentare del numero degli istanti di campionamento.*

Ci si trova, in pratica, di fronte a due *esigenze contrastanti*: scegliere k abbastanza elevato da garantire un basso errore di ricostruzione e scegliere k non troppo elevato per non rendere troppo cattive le proprietà di condizionamento della ricostruzione.

Esercizi

E13 Si consideri il Teorema 3.3.3. Dimostrare che: *se θ non dipende da t allora f è un polinomio di grado al più $k + 1$.*

E14 Sia a un numero reale positivo e j la parte intera superiore di $2a$. Dimostrare che, posto:

$$N = \frac{a^j}{j!}$$

per ogni numero intero $k > j$ si ha:

$$\frac{a^k}{k!} = N \frac{a}{j+1} \cdots \frac{a}{k} < N \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j}$$

Ne segue:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a^k}{k!} = 0$$

E15 Si considerino i dati dell'Esempio 3.3.4 parte (1). Determinare k in modo che $e(f) < 10^{-3}$.

E16 Siano $I = [a, b]$ un intervallo non degenere e $\ell_0(t), \ell_1(t)$ la base di Lagrange di $P_1(\mathbb{R})$ relativa agli istanti di campionamento a, b . Determinare analiticamente:

$$\lambda(a, b) = \max_{t \in I} (|\ell_0(t)| + |\ell_1(t)|)$$

Siano poi $I = [0, 1]$ e $\ell_0(t), \dots, \ell_3(t)$ la base di Lagrange $P_3(\mathbb{R})$ relativa agli istanti di campionamento $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. Utilizzare *Scilab* per ottenere, graficamente, una stima di:

$$\lambda\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = \max_{t \in I} (|\ell_0(t)| + \cdots + |\ell_3(t)|)$$

3.3.2 Ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti

Siano $I = [a, b]$ un intervallo non degenere, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ istanti di campionamento e, per $j = 1, \dots, k$, $I_j = (t_{j-1}, t_j)$. Indichiamo con τ l'insieme aperto unione dei k intervalli I_1, \dots, I_k .

Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è *lineare a tratti su τ* se per ogni $j = 1, \dots, k$ esiste $p_j \in P_1(\mathbb{R})$ tale che $f = p_j$ su I_j . Il termine "lineare a tratti" fa riferimento al grafico di f su τ che, appunto, è unione di segmenti.

3.3.9 Definizione (spazio vettoriale delle funzioni continue e lineari a tratti)

Si indica con $S(\tau)$ l'insieme di *tutte* le funzioni $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue e lineari a tratti su τ . Si verifica facilmente che $S(\tau)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

3.3.10 Osservazione

(a) Dati $y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ esiste un solo elemento di $S(\tau)$ che interpola i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$.

Infatti: Per $j = 1, \dots, k$ sia p_j l'unico elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che interpola i dati $(t_{j-1}, y_{j-1}), (t_j, y_j)$ e sia poi f la funzione continua tale che $f = p_1$ su $I_1, \dots, f = p_k$ su I_k . Allora $f \in S(\tau)$ e $f(t_0) = y_0, \dots, f(t_k) = y_k$. Sia inoltre g un altro elemento di $S(\tau)$ che interpola gli stessi dati. Allora $f - g \in S(\tau)$. Se fosse $f(t) - g(t) \neq 0$ per $t \in I_j$, detto q_j l'elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che coincide con $f - g$ su I_j , si avrebbe: (a) $q_j(t) \neq 0$ e quindi $q_j \neq 0$, e (b) q_j è l'unico elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che interpola i dati $(t_{j-1}, 0), (t_j, 0)$, ovvero $q_j = 0$: assurdo.

(b) Lo spazio $S(\tau)$ ha dimensione $k + 1$.

Infatti: Per $i = 0, \dots, k$, sia s_i l'elemento di $S(\tau)$ che vale *uno* in t_i e *zero* in tutti gli altri istanti di campionamento. Questi elementi sono univocamente determinati per quanto mostrato nel punto (a). Allora si ha:

- Se $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ sono coefficienti tali che $\phi = a_0 s_0 + \dots + a_k s_k = 0$, allora $0 = \phi(t_0) = a_0, \dots, 0 = \phi(t_k) = a_k$: gli elementi s_0, \dots, s_k sono *linearmente indipendenti*.
- Sia $\sigma \in S(\tau)$. Si verifica che l'elemento $\sigma(t_0) s_0 + \dots + \sigma(t_k) s_k \in S(\tau)$ interpola i dati $(t_0, \sigma(t_0)), \dots, (t_k, \sigma(t_k))$. Ma anche σ interpola gli stessi dati. Per l'unicità stabilita nel punto (a) si ha:

$$\sigma = \sigma(t_0) s_0 + \dots + \sigma(t_k) s_k$$

ovvero σ è una combinazione lineare di s_0, \dots, s_k : gli elementi s_0, \dots, s_k sono *generatori di* $S(\tau)$.

Dunque: s_0, \dots, s_k sono una *base* di $S(\tau)$, che chiameremo *base canonica*.

(c) Il problema a cui si riferisce il punto (a) è *lineare di interpolazione*.

3.3.11 Osservazione (Ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti)

Sia c la funzione di campionamento agli istanti t_0, \dots, t_k . Dette y_0, \dots, y_k le componenti di $y \in \mathbb{R}^{k+1}$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow C(I)$ definita da:

$$\rho(y) = \text{l'elemento di } S(\tau) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$$

è una funzione di ricostruzione relativa a c .

Infatti: Utilizzando la base canonica di $S(\tau)$ si ha:

$$\rho(y) = y_0 s_0 + \dots + y_k s_k$$

Allora si constata facilmente che ρ è *lineare*; inoltre, per definizione, $\rho(y)$ interpola i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$.

3.3.12 Teorema (errore di ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti)

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione con *derivata seconda continua* e σ è l'elemento di $S(\tau)$ che interpola i campioni di f , ovvero i dati $(t_0, f(t_0)), \dots, (t_k, f(t_k))$, posto $M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|$ e $h = \max \{ \text{mis } I_1, \dots, \text{mis } I_k \}$, allora per l'errore di ricostruzione relativo ad f si ha:

$$e(f) = \max_{t \in I} |f(t) - \sigma(t)| \leq \frac{M_2}{8} h^2$$

Dimostrazione: Per ogni $j = 1, \dots, k$ esiste $p_j \in P_1(\mathbb{R})$ tale che $\sigma = p_j$ su I_j . Allora, dal Teorema 3.3.3 sull'errore di ricostruzione con interpolazione polinomiale, per $j = 1, \dots, k$ si ha:⁴⁰

$$\text{Per ogni } t \in \bar{I}_j \text{ esiste } \theta_j \in \bar{I}_j \text{ tale che: } f(t) - \sigma(t) = f(t) - p_j(t) = \frac{f''(\theta_j)}{2} (t - t_{j-1})(t - t_j)$$

Per ogni $t \in \bar{I}_j$ si ha poi:

$$\left| \frac{f''(\theta_j)}{2} (t - t_{j-1})(t - t_j) \right| \leq \frac{M_2}{2} \max_{t \in \bar{I}_j} |(t - t_{j-1})(t - t_j)|$$

e:

$$\max_{t \in \bar{I}_j} |(t - t_{j-1})(t - t_j)| = \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{2} \right)^2 = \frac{(\text{mis } I_j)^2}{4}$$

ovvero:

$$\left| \frac{f''(\theta_j)}{2} (t - t_{j-1})(t - t_j) \right| \leq \frac{M_2}{8} (\text{mis } I_j)^2$$

Dunque:

$$\max_{t \in \bar{I}_j} |f(t) - \sigma(t)| \leq \frac{M_2}{8} (\text{mis } I_j)^2$$

Infine:

$$e(f) = \max_{t \in I} |f(t) - \sigma(t)| = \max_j \max_{t \in \bar{I}_j} |f(t) - \sigma(t)| \leq \max_j \frac{M_2}{8} (\text{mis } I_j)^2 = \frac{M_2}{8} h^2$$

⁴⁰Se $J = (a, b)$ è un intervallo aperto, si indica con \bar{J} la *chiusura* di J ovvero l'intervallo chiuso $[a, b]$.

Il Teorema 3.3.12 mostra che per la ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti si ha: *Se f ha derivata seconda continua allora $\lim_{h \rightarrow 0} e(f) = 0$, ovvero: per ottenere un errore di ricostruzione arbitrariamente piccolo è sufficiente utilizzare un insieme di istanti di campionamento con h opportunamente piccolo.*

3.3.13 Esempio

(a) Sia $[a, b]$ un intervallo non degenere. Per il criterio di scelta degli istanti di campionamento del *campionamento uniforme* (Esempio 3.3.7 punto (b)) si ha:

$$h = \frac{b - a}{k}$$

Dunque è possibile ottenere h piccolo quanto si vuole scegliendo il numero di istanti di campionamento $k + 1$ opportunamente grande.

(b) Sia $[a, b] = [0, 1]$ e si consideri il criterio di scelta degli istanti di campionamento definito per ogni numero intero k da:

$$t_j = \frac{j}{j+1} \quad \text{per } j = 0, \dots, k-1 \quad \text{e} \quad t_k = 1$$

Allora:

$$h = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{per } k > 1 \end{cases}$$

Questo criterio di scelta degli istanti di campionamento *non consente* di ottenere $h < \frac{1}{2}$.

3.3.14 Esempio

Siano $f(t) = \sin t$ e $I = [0, 2\pi]$. Poiché $M_2 = 1$, utilizzando il criterio di scelta degli istanti di campionamento in I del *campionamento uniforme* si ha:

$$e(f) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2$$

Per ottenere un errore di ricostruzione non superiore a 10^{-n} , n numero intero positivo, è sufficiente scegliere k tale che:

$$\frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \leq 10^{-n}$$

ovvero:

$$k^2 \geq \frac{1}{8} \frac{4\pi^2}{10^{-n}}$$

e quindi:

$$k \geq \frac{2\pi}{\sqrt{8}} \sqrt{10^n}$$

3.3.15 Osservazione (Condizionamento della ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti)

Procedendo come nell'analogia Osservazione 3.3.8 e con le medesime notazioni, nel caso di ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti, utilizzando la base canonica di $S(\tau)$ si ottiene:

$$|r(\delta)| = |\delta_0 s_0(t) + \dots + \delta_k s_k(t)| \leq |\delta_0| |s_0(t)| + \dots + |\delta_k| |s_k(t)|$$

Introdotta la misura della perturbazione $\|\delta\|_\infty$ si deduce:

$$|\delta_0| |s_0(t)| + \dots + |\delta_k| |s_k(t)| \leq \|\delta\|_\infty (|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)|)$$

Ma per ogni $t \in I$ e $j = 0, \dots, k$ si ha: $s_j(t) \geq 0$, dunque:

$$|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)| = s_0(t) + \dots + s_k(t)$$

e si constata inoltre che:

$$s_0(t) + \dots + s_k(t) = 1$$

Allora:

$$\max_{t \in I} |r(y + \delta) - r(y)| = \max_{t \in I} |r(\delta)| \leq \|\delta\|_\infty$$

Questa disuguaglianza mostra che *il condizionamento del problema della ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti è sempre buono.*

Esercizi

E17 Sia $I = [0, 2]$, $\tau = (0, 1) \cup (1, 2)$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione continua e lineare a tratti definita da:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + t & \text{per } t \in (0, 1) \\ 3 - t & \text{per } t \in (1, 2) \end{cases}$$

Determinare $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

E18 Siano $I = [0, 1]$ e $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1$ gli istanti di campionamento. Determinare gli elementi $\sigma \in S(\tau)$ che verificano le condizioni:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sigma(x) dx = 0 \quad , \quad \sigma(0) = 1 \quad , \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \sigma(x) dx = -1$$

E19 Siano $I = [0, 4]$ e $\tau = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$. Detta s_0, \dots, s_4 la base canonica di $S(\tau)$, disegnare il grafico di $\sigma = 4s_0 - s_1 + 2s_2 + s_3 - 2s_4$.

E20 ★ Dimostrare che *la disuguaglianza finale dell'Osservazione 3.3.15 è la migliore possibile* nel senso che: *esiste $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ tale che:*

$$\max_{t \in I} |r(y + \delta) - r(y)| = \|\delta\|_\infty$$

E21 Siano $I = [0, 1]$ e $f(t) = e^{-t}$. Scelto di utilizzare il campionamento uniforme e la ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti, determinare il numero di istanti di campionamento in modo che $e(f) < 10^{-3}$. Confrontare la risposta con quella dell'Esercizio E15. Discutere il risultato del confronto.
