1 Zeri di funzione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed $\alpha \in [a, b]$ uno zero di f. In questo Capitolo affrontiamo il problema di *determinare un'approssimazione accurata di* α.

Una *condizione sufficiente* per l'esistenza di *almeno uno* zero di f è data dal seguente:

1.0.17 Teorema (di esistenza degli zeri)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*. Se $f(a)\, f(b) < 0$ allora esiste $\alpha \in (a, b)$ zero di f.

– *Esempio*

Sia $f(x) = e^{x^2} - 2$.

La funzione è continua su $[0, 1]$ e $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e - 2 > 0$: il Teorema di esistenza degli zeri assicura l'esistenza di *almeno uno* zero di f in $(0, 1)$.

La funzione è continua su $[-1, 1]$ ma $f(-1) = e - 2 > 0$ e $f(1) > 0$: il Teorema di esistenza degli zeri *non è applicabile* e quindi non fornisce informazioni sull'esistenza di zeri di f in $(-1, 1)$. La funzione è pari dunque, per quanto osservato sopra, ha certamente almeno due zeri in $(-1, 1)$.

1.1 Metodo di bisezione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua* tale che $f(a)\, f(b) < 0$. Il Teorema precedente assicura l'*esistenza* di uno zero di f in (a, b). Il primo metodo che consideriamo per approssimare lo zero è il *metodo di bisezione*, basato sul Teorema appena enunciato. Si tratta di un metodo *iterativo*, ovvero che determina l'oggetto cercato costruendo *una successione*. La procedura seguente, descritta in un linguaggio che utilizza il tipo *numero reale*, realizza il metodo:

- $z = \mathit{Bisezione}(f, a, b)$

  // $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua* tale che $f(a)f(b) < 0$.

  // k è il contatore delle iterazioni eseguite.

  $k = 0$;

  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2$;

  `ripeti`:

  `se` $f(x_k) = 0$ `allora` esci dal ciclo;
  `se` $f(x_k)f(b_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = x_k; b_{k+1} = b_k$;
  `se` $f(a_k)f(x_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_k$;
  $x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$;
  $k = k + 1$;

  $z = x_k$

La procedura opera in questo modo: Se per qualche k si ha $f(x_k) = 0$, allora essa *termina* e restituisce uno zero di f. Se, invece, per ogni k si ha $f(x_k) \neq 0$, allora essa *non termina* e genera *due* successioni: la successione di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ e la successione di numeri reali x_k, *punti medi* degli intervalli I_k.

Per ciascun k si ha:

– I_k contiene, per costruzione, almeno uno zero di f

– $I_{k+1} \subset I_k$

– $\operatorname{mis} I_k = \dfrac{\operatorname{mis} I_0}{2^k}$

Dalla terza proprietà segue:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mis} I_k = 0$$

dunque la successione di intervalli "individua con incertezza tendente a zero" uno zero di f.

Si ha inoltre:

1.1.1 Osservazione (convergenza delle successioni)

Le successioni a_k, b_k ed x_k sono convergenti ed hanno lo stesso limite. Detto α tale limite si ha: α è zero di f.

Infatti: Per costruzione la successione a_k risulta *monotona non decrescente* e *superiormente limitata* (da b), dunque convergente: $\lim a_k = A$. Analogamente: la successione b_k risulta *monotona non crescente* e *inferiormente limitata* (da a), dunque convergente: $\lim b_k = B$. La successione $\operatorname{mis} I_k = b_k - a_k$ è allora differenza di successioni convergenti e quindi:

$$0 = \lim \operatorname{mis} I_k = \lim(b_k - a_k) = B - A \qquad \text{dunque} \qquad A = B$$

Posto $\alpha = A$, poiché $a_k < x_k < b_k$ si ha $\lim x_k = \alpha$.

Infine, sia ad esempio: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Per ogni k si ha: $f(a_k) < 0$ e $f(b_k) > 0$. Tenuto conto anche della continuità di f:

$$\lim f(a_k) = f(\alpha) \leqslant 0 \qquad \text{e} \qquad \lim f(b_k) = f(\alpha) \geqslant 0$$

e quindi $f(\alpha) = 0$.

1.1.2 Esercizio

Sia:

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{2}}$$

Discutere l'assegnamento $z = \textit{Bisezione}\,(f, 0, 2)$.

La funzione f è definita e continua sull'unione $\Omega = [0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2]$ e *non*, come richiesto dal commento della procedura *Bisezione*, su $[0, 2]$. Però per ogni k si ha: a_k, b_k e perciò x_k sono numeri razionali in $[0, 2]$ dunque in Ω. Allora la procedura *non termina* (si ha sempre $f(x_k) \neq 0$, infatti f *non ha zeri* in Ω). Le successioni a_k, b_k e x_k che la procedura costruisce sono ancora convergenti ad un limite comune α (come mostra la prima parte della dimostrazione dell'Osservazione precedente). Inoltre, se fosse $\alpha \neq \sqrt{2}$ la funzione f sarebbe continua in α e quindi si avrebbe $f(\alpha) = 0$. Ma, come già detto, f non ha zeri in Ω. *La procedura individua il punto in cui f "cambia segno"*.

L'Osservazione 1.1.1 mostra che la procedura *Bisezione* (come tutte le procedure che realizzano metodi iterativi) determina uno zero di f come *limite* di una successione. Come abbiamo detto nella parte introduttiva del Capitolo 0, le procedure descritte saranno eseguite da un calcolatore. Una procedura che costruisce *tutta* una successione *non è accettabile* in questo contesto perché il calcolatore impiegherebbe un *tempo infinito* per eseguirla (il calcolatore impiega un tempo *non infinitesimo* per calcolare *ciascun elemento* della successione). Per rendere *finito* in ogni caso il tempo di esecuzione, è necessario *interrompere* la costruzione della successione. Così facendo la procedura determinerà, con l'ultimo elemento calcolato della successione, solo *un'approssimazione* di uno zero di f. La costruzione della successione deve essere interrotta *quando l'ultimo elemento costruito approssima lo zero di f con sufficiente accuratezza.* A questo scopo si introduce nella procedura un *criterio d'arresto.*

1.1.3 Esempio (criterio d'arresto di tipo assoluto)

Assegnato un numero reale positivo δ, un comune esempio di criterio d'arresto è:

se $\operatorname{mis} I_k < \delta$ *allora* arresta la costruzione

ovvero: "arresta la costruzione se l'ultimo intervallo calcolato è sufficientemente piccolo." Il criterio d'arresto è introdotto nella procedura *Bisezione* modificandola come segue:

- $z = \textit{Bisezione}\,(f, a, b, \delta)$

  // $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$, δ numero reale positivo.

  // k è il contatore delle iterazioni eseguite.

  $k = 0;$

  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2;$

  `ripeti`:

      `se` $\big(f(x_k) = 0$ `oppure` $b_k - a_k < \delta\big)$ `allora` esci dal ciclo;

      `se` $f(x_k)f(b_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = x_k; b_{k+1} = b_k;$

$\quad\quad$ `se` $f(a_k)f(x_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_k;$

$\quad\quad$ $x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2;$

$\quad\quad$ $k = k + 1;$

$\quad$ $z = x_k$

Un criterio d'arresto è in generale definito da *un'opportuna condizione* sugli elementi della successione calcolati dalla procedura. La costruzione della successione verrà interrotta *appena* e *solo se* la condizione risulterà soddisfatta.

1.1.4 Osservazione (proprietà di un criterio d'arresto)
La condizione che definisce il criterio d'arresto deve avere le proprietà seguenti:

– Essere *calcolabile*: ad ogni iterazione la procedura *deve* essere in grado di verificare se la condizione è soddisfatta.

– Essere *efficace*: in ogni caso la condizione *deve* essere soddisfatta dopo un numero *finito* di iterazioni.

– Quando la condizione è soddisfatta la procedura *deve* restituire un elemento che *approssima l'oggetto cercato con l'accuratezza richiesta* dall'utilizzatore.

Il criterio d'arresto proposto nell'Esempio 1.1.3 *soddisfa* le tre proprietà: *è calcolabile*, infatti a ciascuna iterazione la procedura conosce a_k e b_k, può calcolare $\operatorname{mis} I_k = b_k - a_k$ e verificare se è minore del valore δ fornito dall'utilizzatore; *è efficace*, infatti si ha $\lim \operatorname{mis} I_k = 0$ e per ogni $\delta > 0$ la disuguaglianza $\operatorname{mis} I_k < \delta$ è *certamente* soddisfatta dopo un numero *finito* di iterazioni. Infine, quando il criterio di arresto è soddisfatto la procedura restituisce x_k, punto medio dell'ultimo intervallo calcolato I_k, e tale intervallo, per costruzione, contiene almeno uno zero α di f. Si ha allora:

$$|\, x_k - \alpha \,| \leqslant \frac{\operatorname{mis} I_k}{2} < \tfrac{1}{2}\,\delta < \delta$$

ovvero la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con *errore assoluto* minore di δ. Il criterio verifica dunque la terza proprietà a patto che l'utilizzatore misuri l'accuratezza con l'errore assoluto. Per questo motivo il criterio d'arresto proposto è classificato *di tipo assoluto*.

– *Esempi*

Un criterio d'arresto calcolabile ed efficace ma che *non necessariamente* restituisce un valore che approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta è il seguente. Sia δ un numero reale positivo:

se $|\, f(x_k) \,| < \delta$ *allora* arresta la costruzione

Supponiamo che f sia una funzione con derivata prima continua e non nulla in $[a, b]$, α lo zero di f in $[a, b]$ e x_k tale che $|\, f(x_k) \,| = \frac{1}{2}\,\delta$. Per il Teorema di Lagrange esiste θ tra x_k ed α tale che:

$$|\, f(x_k) \,| = |\, f(x_k) - f(\alpha) \,| = |\, f'(\theta) \,|\, |x_k - \alpha \,|$$

dunque:

$$|\, x_k - \alpha \,| = \frac{|\, f(x_k) \,|}{|\, f'(\theta) \,|} = \frac{\delta}{2\,|\, f'(\theta) \,|}$$

Il valore x_k approssima α con l'accuratezza richiesta *se e solo se* $|\, f'(\theta) \,| > \frac{1}{2}$.

Un criterio d'arresto che è efficace e restituisce un valore che approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta *ma non è calcolabile*, è il seguente. Siano α uno zero di f in $[a, b]$ e δ un numero reale positivo:

se $|\, x_k - \alpha \,| < \delta$ *allora* arresta la costruzione

La procedura *non conosce* α e quindi non può verificare se la condizione è soddisfatta.

1.1.5 Esercizio

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. La procedura:

$$z = \mathit{Bisezione}\,(f, a, b, \delta)$$

restituisce un'approssimazione di uno zero di f in $[a, b]$ dopo aver eseguito k iterazioni. Si vuole determinare k.

Se la procedura termina trovando uno zero di f, il numero di iterazioni eseguite è in generale imprevedibile. Se invece la procedura termina perchè l'ultimo intervallo costruito ha misura minore di δ allora:

$$\operatorname{mis} I_k = \frac{\operatorname{mis} I_0}{2^k} < \delta \quad \Rightarrow \quad k > \log_2 \operatorname{mis} I_0 - \log_2 \delta$$

La procedura si arresta dopo aver eseguito:

$$k = \lfloor \log_2 \operatorname{mis} I_0 - \log_2 \delta \rfloor + 1$$

iterazioni.[15]

Ad esempio, se $\operatorname{mis} I_0 = 2$ e $\delta = 10^{-10}$ si ha:

$$k = \lfloor 1 + 10 \log_2 10 \rfloor + 1 = 35$$

Inoltre, fissato $\operatorname{mis} I_0$, il valore di k tende a infinito come $\log_2 \delta$.

In generale: *tanto più accurata* l'utilizzatore vuole che sia l'approssimazione richiesta, *tante più iterazioni* deve eseguire la procedura (cioè: *tanto più impegnativo* è ottenere l'approssimazione).

1.1.6 Esempio (criterio d'arresto di tipo relativo)

Il criterio d'arresto utilizzato nella procedura *Bisezione* (f, a, b, δ) è stato classificato di *tipo assoluto* perchè l'ultimo elemento calcolato della successione approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta *a patto* che l'utilizzatore misuri l'accuratezza con l'*errore assoluto*. Un criterio di *tipo relativo*, adatto quindi se l'utilizzatore misura l'accuratezza con l'*errore relativo*, è il seguente. Dato ϵ numero reale positivo e posto $m_k = \min\{\,|\,a_k\,|, |\,b_k\,|\,\}$:

$$\mathit{se}\ \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} < \epsilon\ \mathit{allora}\ \text{arresta la costruzione}$$

Il criterio, in quanto di tipo relativo, è utilizzabile *solo* quando la procedura approssima uno zero *non nullo* di f e in tal caso si può supporre che sia:

$$0 \notin I_0 = [a, b]$$

e quindi $0 \notin I_k$ (che assicura $m_k \neq 0$) per ogni k. Il criterio d'arresto è introdotto nella procedura *Bisezione* modificandola come segue:

- $z = \mathit{Bisezione}\,(f, a, b, \epsilon)$

  // $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$, ϵ numero reale positivo.

  // k è il contatore delle iterazioni eseguite.

  $k = 0;$

  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2; m_0 = \min\{\,|\,a_0\,|, |\,b_0\,|\,\};$

  `ripeti`:

  `se` $\big(f(x_k) = 0$ `oppure` $(b_k - a_k)/m_k < \epsilon\big)$ `allora` esci dal ciclo;
  `se` $f(x_k)f(b_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = x_k; b_{k+1} = b_k;$
  `se` $f(a_k)f(x_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_k;$
  $x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2;$
  $m_{k+1} = \min\{\,|\,a_{k+1}\,|, |\,b_{k+1}\,|\,\};$
  $k = k + 1;$

  $z = x_k$

[15] Se t è un numero reale positivo, $\lfloor t \rfloor$ è la *parte intera* di t: il più grande intero minore o uguale di t. Dunque $\lfloor t \rfloor + 1$ è il più piccolo intero maggiore di t.

Il criterio è *calcolabile*: a ciascuna iterazione la procedura conosce a_k e b_k, sa calcolare m_k e verificare se la disuguaglianza è soddisfatta. Il criterio è anche *efficace*, infatti:

$$\operatorname{mis} I_k \to 0 \quad \text{e} \quad m_k \geqslant m_0 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} = 0$$

dunque per ogni $\epsilon > 0$ la disuguaglianza è certamente verificata dopo un numero finito di iterazioni. Infine, quando il criterio di arresto è verificato la procedura restituisce x_k, punto medio dell'ultimo intervallo calcolato I_k. Tale intervallo, per costruzione, contiene almeno uno zero $\alpha \neq 0$ di f e si ha:

$$|\,\alpha\,| > m_k \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{|\,x_k - \alpha\,|}{|\,\alpha\,|} < \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} < \epsilon$$

ovvero la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con *errore relativo* minore di ϵ.

1.2 Uso del tipo *numero in virgola mobile e precisione finita* nel metodo di bisezione

In questa sezione si discute l'esecuzione in *Scilab* della procedura definita nell'Esempio 1.1.3.

Si assume, per semplicità, $M = F(2, 53)$ — si veda l'Osservazione 0.1.15 — e si indicano, come usuale, con rd e u, rispettivamente, la funzione arrotondamento e la precisione di macchina in M.

1.2.1 Teorema (stabilità dell'algoritmo di bisezione)
Siano: $a < b$ due numeri reali positivi tali che $\mathrm{rd}(a) \neq \mathrm{rd}(b)$, J_0 l'intervallo $[\mathrm{rd}(a), \mathrm{rd}(b)]$, $f : J_0 \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $\phi : J_0 \to M$ l'algoritmo utilizzato per approssimare i valori di f e δ un numero reale positivo.

Se l'algoritmo ϕ è *uniformemente accurato* quando utilizzato per approssimare f in $J_0 \cap M$, ovvero:

esiste un numero reale d_f *piccolo* tale che per ogni $\theta \in J_0 \cap M$ si ha: $\quad |\phi(\theta) - f(\theta)| \leqslant d_f$

e l'istruzione `Bisezione(`f, a, b, δ`)` eseguita in *Scilab* definisce un elemento $\xi \in M$, *allora* si ha:

$$|\,\xi - \alpha^*\,| < \delta$$

dove α^* è uno zero di una funzione continua $g : J_0 \to \mathbb{R}$ *vicina* ad f nel senso che:

$$\text{per ogni } x \in J_0 \text{ si ha:} \quad |f(x) - g(x)| \leqslant d_f$$

Dimostrazione. La trasformazione descritta nella Sezione 0.4 produce:

- `z = Bisezione(`f, a, b, δ`)`

    // Per approssimare i valori di f si utilizza un algoritmo ϕ tale che: $\phi\big(\mathrm{rd}(a)\big)\,\phi\big(\mathrm{rd}(b)\big) < 0$.

    // k è il contatore delle iterazioni eseguite.

    k `=` 0`;`

    α_0 `=` $\mathrm{rd}(a)$`;` β_0 `=` $\mathrm{rd}(b)$`;` ξ_0 `=` `(`$\alpha_0 \oplus \beta_0$`)` $\oslash$ 2`;`

    `ripeti:`

        `se (`$\phi(\xi_k)$ `=` 0 `oppure` $\beta_k \ominus \alpha_k < \mathrm{rd}(\delta)$`) allora` esci dal ciclo`;`

        `se` $\phi(\xi_k) \otimes \phi(\beta_k) < 0$ `allora` α_{k+1} `=` ξ_k`;` β_{k+1} `=` β_k`;`

        `se` $\phi(\alpha_k) \otimes \phi(\xi_k) < 0$ `allora` α_{k+1} `=` α_k`;` β_{k+1} `=` ξ_k`;`

        ξ_{k+1} `=` `(`$\alpha_{k+1} \oplus \beta_{k+1}$`)` $\oslash$ 2`;`

        k `=` $k+1$`;`

    `z` `=` ξ_k

Se l'istruzione `Bisezione`(f,a,b,δ) eseguita in *Scilab* definisce un elemento $\xi \in M$ allora: esiste un numero intero non negativo k tale che alla k-esima iterazione il criterio d'arresto è verificato, cioè:

$$\phi(\xi_k) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \beta_k \ominus \alpha_k < \mathrm{rd}(\delta)$$

e si ha: $\xi = \xi_k \in M \cap J_0$.

Siano adesso $p : J_0 \to \mathbb{R}$ la funzione continua il cui grafico è la spezzata di vertici i punti di coordinate $\big(\xi, \phi(\xi) - f(\xi)\big)$, $\xi \in M \cap J_0$, ordinati per ascisse crescenti e $g : J_0 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = f(x) + p(x)$. Allora:

(i) Per ogni $\xi \in M \cap J_0$ si ha: $p(\xi) = \phi(\xi) - f(\xi)$ e quindi $g(\xi) = \phi(\xi)$.

(ii) Dall'ipotesi di uniforme accuratezza dell'algoritmo ϕ, utilizzando l'Osservazione 3.3.15[16], si ottiene che per ogni $x \in J_0$ sussiste la limitazione $|p(x)| \leqslant d_f$ e quindi:

$$\text{per ogni } x \in J_0 : \quad |g(x) - f(x)| = |p(x)| \leqslant d_f$$

ovvero: *la funzione g è vicina ad f.*

(iii) La funzione g è *continua*.

Si osservi infine che:

- Se la procedura si arresta perchè $\phi(\xi_k) = 0$, l'asserto (i) garantisce che si ha anche $g(\xi_k) = 0$. Posto $\alpha^* = \xi_k$ si ha: α^* è *uno zero* della funzione g, vicina ad f per l'asserto (ii), e $|\xi - \alpha^*| = 0 < \delta$.
- Se la procedura si arresta perchè $\beta_k \ominus \alpha_k < \mathrm{rd}(\delta)$, poiché per la monotonia della funzione rd (Osservazione 0.2.5) si ha:

$$\beta_k \ominus \alpha_k < \mathrm{rd}(\delta) \quad \Rightarrow \quad \beta_k - \alpha_k < \delta$$

allora l'ultimo intervallo costruito, $J_k = [\alpha_k, \beta_k]$, ha misura minore di δ. Inoltre, per costruzione, si ha: $\phi(\alpha_k)\,\phi(\beta_k) < 0$ dunque, utilizzando l'asserto (i):

$$g(\alpha_k)\,g(\beta_k) = \phi(\alpha_k)\,\phi(\beta_k) < 0$$

Per il Teorema di esistenza degli zeri e la continuità di g, asserto (iii), esiste allora $\alpha^* \in J_k$ zero di g e, ricordando che per costruzione è $\xi = \xi_k \in J_k$, si ha:

$$|\xi - \alpha^*| \leqslant \mathrm{mis}\, J_k = \beta_k - \alpha_k < \delta$$

Il teorema è dimostrato.

1.2.2 Osservazione (efficacia del criterio d'arresto)

La procedura introdotta nell'Esempio 1.1.3 definisce *in ogni caso* un numero reale perchè, per la convergenza a zero della successione $\mathrm{mis}\, I_k$, il criterio d'arresto utilizzato è *efficace*. Invece, la successione $\mathrm{mis}\, J_k$ delle misure degli intervalli generati dalla procedura `Bisezione` è solamente *non crescente*. Infatti: poiché per ogni k si ha:[17]

$$\xi_k = \mathrm{rd}\Big(\frac{\alpha_k + \beta_k}{2}\Big)$$

ovvero ξ_k è l'*arrotondato del punto medio* dell'intervallo $J_k = [\alpha_k, \beta_k]$, allora $\alpha_k \leqslant \xi_k \leqslant \beta_k$, e per $k \geqslant 1$ è $J_k \subset J_{k-1}$. Come l'esempio seguente mostra, la successione $\mathrm{mis}\, J_k$, salvo casi particolari, *non tende a zero* e l'istruzione `Bisezione`(f,a,b,δ) eseguita in *Scilab può non definire* un elemento $\xi \in M$ perchè il criterio d'arresto *può risultare non efficace.*

1.2.3 Esempio

Sia $f(x) = x^2 - 2$. Se, posto $\delta = 10^{-16}$ e scelto l'algoritmo ingenuo per approssimare i valori di f, si esegue l'assegnamento:

`z = Bisezione`$(f,0,2,\delta)$

[16] Poiché J_0 contiene un *numero finito* di elementi di M, p è una funzione continua lineare a tratti come definito nella Sezione 3.3.2.

[17] Vedere gli Esercizi *E4-E6*.

con *Scilab*, la procedura *non termina*: il criterio d'arresto risulta *non efficace.*

Il problema è questo (si ricordi che si è scelto $M = F(2, 53)$): si è chiesto alla procedura di determinare un intervallo *ad estremi elementi di M, contenente* $\sqrt{2}$ e *di misura minore di* δ. Ma *il più piccolo* intervallo che ha le prime due delle proprietà richieste è quello che ha per estremi i due elementi di M *adiacenti* a $\sqrt{2}$. Poiché l'esponente di $\sqrt{2}$ in base due è *uno*, la misura di tale intervallo (la distanza tra i due numeri di macchina) è $\beta^{b-m} = 2^{1-53} \approx 2.22\,10^{-16}$, *maggiore* di δ.

La procedura *non può* trovare un intervallo sufficientemente piccolo e quindi *non termina.* In generale, detto b l'esponente dello zero di f che si vuole approssimare, l'utilizzatore *deve* assegnare al parametro δ un valore maggiore di $2^{b-53} = 2^b\, u$.

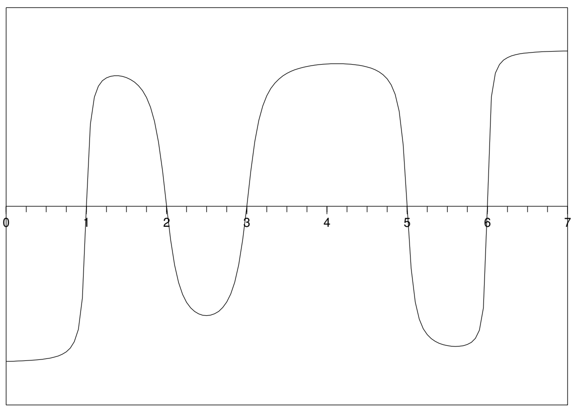
1.2.4 Osservazione (accuratezza dell'algoritmo di bisezione)

Il Teorema 1.2.1 stabilisce che, sotto opportune ipotesi, l'istruzione `Bisezione`(f, a, b, δ) determina un'elemento $\xi \in M$ approssimazione *accurata* di uno zero di una funzione *vicina* ad f, ovvero che "l'algoritmo di bisezione è *stabile*." Per decidere se ξ è anche un'approssimazione accurata di *uno zero di f*, ovvero se "l'algoritmo di bisezione è *accurato*," occorre studiare il *condizionamento* del calcolo di uno zero di f: *quanto grande può essere rispetto a d* la distanza tra uno zero di g e lo zero di f, argomento della Sezione 1.6.

Esercizi

E1 Sia $f(x) = 1/x$, definita per $x \neq 0$. La funzione è *continua* nel suo insieme di definizione e $f(-1) < 0$, $f(1) > 0$. Perché non possiamo concludere, in base al Teorema di esistenza degli zeri, che f ha almeno uno zero in $(-1, 1)$?

E2 Il grafico della funzione $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ è rappresentato nella figura seguente.



Sia x_k la successione costruita dalla procedura *Bisezione*$(f, 0, 7)$. Determinare $\lim_{k\to\infty} x_k$.

E3 Sia $f(x) = x^3 - 2$.

(1) Determinare analiticamente gli zeri di f.

(2) Determinare *Bisezione*$(f, 0, 2, \frac{1}{2})$.

E4 Siano $M = F(2, m)$ e $\alpha, \omega \in M$. Dimostrare che:

$$\xi = (\alpha \oslash 2) \oplus (\omega \oslash 2) = \mathrm{rd}\Big(\frac{\alpha + \omega}{2}\Big)$$

Dunque ξ è *l'arrotondato del punto medio* dell'intervallo $[\alpha, \omega]$. Dimostrare che, allora:

$$\alpha \leqslant \xi \leqslant \omega$$

E5 ★ Siano β un numero intero pari e rd una funzione arrotondamento in $F(\beta, m)$. Si supponga noto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b\,\mathrm{rd}(x)$$

Siano $M = F(2, m)$ e $\alpha, \omega \in M$. Dimostrare che:

$$\theta = (\alpha \oplus \omega) \oslash 2 = \mathrm{rd}\Big(\frac{\alpha + \omega}{2}\Big)$$

ovvero che θ è *l'arrotondato del punto medio* dell'intervallo $[\alpha, \omega]$.

E6 Siano $M = F(10, 6)$, $\alpha = 0.742531$ e $\omega = 0.742533$. Calcolare:

$$\gamma = (\alpha \oplus \omega) \oslash 2$$

e constatare che $\gamma < \alpha$.

E7 ★ Siano β un numero intero pari, x un numero reale positivo e b un numero intero. Dimostrare che, detta rd la funzione arrotondamento in $F(\beta, m)$, si ha:

$$\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b\,\mathrm{rd}(x) \qquad (*)$$

Soluzione.

Se $x \in F(\beta, m)$ anche $\beta^b x \in F(\beta, m)$ e l'uguaglianza $(*)$ è verificata: $\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b x = \beta^b \mathrm{rd}(x)$.

Se $x \notin F(\beta, m)$, siano ξ e $\sigma(\xi)$ gli elementi di $F(\beta, m)$ *adiacenti* ad x. Detti n l'esponente e γ la frazione di ξ si ha:

(a) $\beta^b\xi < \beta^b x < \beta^b\sigma(\xi) = \beta^b\sigma(\beta^n\gamma) = \beta^{b+n}(\gamma + \beta^{-m}) = \sigma(\beta^b\xi)$

(b) $|\,x - \xi\,| \gtreqless |\,x - \sigma(\xi)\,|$ se e solo se $|\,\beta^b x - \beta^b\xi\,| \gtreqless |\,\beta^b x - \sigma(\beta^b\xi)\,|\,\big(= |\,\beta^b x - \beta^b\sigma(\xi)\,|\big)$

(c) Per ogni $\theta \in F(\beta, m)$ la frazione di $\beta^b\theta$ è uguale a quella di θ.

L'asserto (a) significa che $\beta^b\xi$ e $\sigma(\beta^b\xi)$ sono gli elementi di $F(\beta, m)$ *adiacenti* a $\beta^b x$; l'asserto (b) dimostra l'uguaglianza $(*)$ nel caso di elementi adiacenti *non* equidistanti e l'asserto (c) nel caso di elementi adiacenti equidistanti.

E8 Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \neq 0$ e ϕ l'algoritmo utilizzato per approssimare il valore di f in x. Sia infine e l'errore relativo commesso approssimando $f(x)$ con $\phi(x)$. Dimostrare che $f(x)$ e $\phi(x)$ hanno lo *stesso segno* se e solo se $e > -1$.

E9 ♠ Sia `Bisezione` la procedura *Scilab* realizzata nella prima parte dell'Esercitazione 3 e f la funzione definita da $f(x) = \mathrm{sen}\; x$.

(1) Dopo aver definito la funzione di intestazione:

```
function y = S(x)
```

che realizza f ed assegnato alla variabile `u` il valore della precizione di macchina, constatare che dopo l'assegnamento:

```
[z,v] = Bisezione(S,2,4,5*u)
```

il valore di `z` è $\mathrm{rd}(\pi)$.

(2) Spiegare perché l'esecuzione dell'assegnamento precedente *termina* mentre quella dell'assegnamento:

```
[z,v] = Bisezione(S,2,4,4*u)
```

non termina.

E10 Si consideri la procedura *Bisezione* descritta nell'Esempio 1.1.6. Assegnata una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $0 \notin [a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, l'assegnamento:

$$z = \mathit{Bisezione}(f, a, b, \epsilon)$$

restituisce un'approssimazione di uno zero di f in $[a, b]$, con $f(z) \neq 0$, dopo aver eseguito k iterazioni. Determinare una limitazione superiore per k in termini di a, b ed ϵ.

1.3 Metodi ad un punto

Sia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*. La procedura seguente, descritta in un linguaggio che utilizza il tipo *numero reale*, realizza il *metodo iterativo ad un punto definito da* h:

- $z = MetodoUnPunto\,(h, \gamma)$

  // $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione *continua*, $\gamma \in [a, b]$.

  $x_0 = \gamma;$

  $k = 0;$

  `ripeti`:

   `se` $x_k \notin [a, b]$ `allora` esci dal ciclo;

   $x_{k+1} = h(x_k);$

   $k = k + 1;$

  $z = x_k$

La procedura opera in questo modo: Se per qualche k si ha $x_k \notin [a, b]$ allora essa *termina*. Se, invece, per ogni k si ha $x_k \in [a, b]$ allora essa *non termina* e costruisce una successione di numeri reali $x_k \in [a, b]$. Inoltre:

1.3.1 Osservazione
Se la procedura MetodoUnPunto (h, γ) *genera una successione* x_k *convergente, allora il limite della successione è un punto unito di* h *in* $[a, b]$.[18]

Dimostrazione: Sia α il limite della successione x_k. La successione $h(x_0), h(x_1), \ldots,$ per la continuità di h, è convergente e $\lim h(x_k) = h(\alpha)$. Ma le successioni $x_1, x_2, \ldots$ e $h(x_0), h(x_1), \ldots$ sono *identiche* e quindi hanno lo stesso limite, ovvero $\alpha = h(\alpha)$.

Dunque: *il metodo ad un punto definito da* h *determina i punti uniti di* h *generando successioni ad essi convergenti.*

Sia f la funzione della quale si vuole approssimare uno zero. *Se* una funzione continua h è tale che:

insieme degli *zeri* di f = insieme dei *punti uniti* di h

allora è *ragionevole* tentare di utilizzare il metodo ad un punto definito da h per approssimare gli zeri di f.

Assegnata f esistono *infinite* funzioni h che hanno la proprietà richiesta.

1.3.2 Esempio
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*.

- La funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da: $h(x) = x - f(x)$ è continua (perchè lo è f) e si ha:

  $$f(\alpha) = 0 \Rightarrow h(\alpha) = \alpha - f(\alpha) = \alpha$$

  e:

  $$\alpha = h(\alpha) \Rightarrow \alpha = \alpha - f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

- Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che:

  $$\text{per ogni } x \in [a, b] \text{ si ha } g(x) \neq 0$$

  Allora la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da: $h(x) = x - g(x)f(x)$ è continua e $\alpha \in [a, b]$ è punto unito di h se e solo se è zero di f. (*Esercizio*: dimostrare l'asserto.)

Una volta scelta la funzione h, ci si domanda se esista, ed eventualmente come individuare, qualche valore di γ a partire dal quale la successione generata dal metodo iterativo definito da h risulti *convergente*. Si osservi che se α è punto unito di h allora la successione generata a partire da $\gamma = \alpha$ è *costante* (per ogni k si ha $\xi_k = \alpha$) e quindi convergente. Ma la scelta $\gamma = \alpha$ *non è*

[18] Si ricordi che un *punto unito* di una funzione $h : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, è un numero reale $\alpha \in \Omega$ che verifica la relazione: $\alpha = h(\alpha)$.

praticamente ragionevole, dunque dalla ricerca dei valori di γ da cui partire si devono *escludere* i punti uniti di h.

Il Teorema seguente fornisce *condizioni sufficienti* affinché la procedura *MetodoUnPunto* (h, γ) generi una successione convergente.

1.3.3 Teorema (di convergenza)

Siano $[a, b]$ un intervallo, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *con derivata prima continua* e γ un elemento di $[a, b]$ tali che:

(1) esiste α punto unito di h in $[a, b]$;

(2) esiste $L \in [0, 1)$ tale che per ogni $x \in [a, b]$ si ha: $|\, h'(x)\, | \leqslant L$;

(3) la procedura *MetodoUnPunto* (h, γ) genera una successione x_k in $[a, b]$.

Allora: (i) α è l'*unico* punto unito di h in $[a, b]$ e (ii) la successione x_k è *convergente* ad α.

Dimostrazione. (i) Per assurdo: se $\beta \neq \alpha$ è un altro punto unito di h in $[a, b]$ si ha:

$$\beta - \alpha = h(\beta) - h(\alpha)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ compreso tra α e β, e quindi $\theta \in [a, b]$, tale che:

$$h(\beta) - h(\alpha) = h'(\theta)(\beta - \alpha)$$

ovvero:

$$\beta - \alpha = h'(\theta)(\beta - \alpha)$$

Essendo $\beta - \alpha \neq 0$, l'uguaglianza precedente sussiste *se e solo se* $h'(\theta) = 1$. Questo contraddice l'ipotesi (2).

(ii) Dimostriamo che la successione $x_k - \alpha$ converge a zero. Sia k un intero positivo. Allora:

$$x_k - \alpha = h(x_{k-1}) - h(\alpha)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ_{k-1} compreso tra x_{k-1} e α, e quindi $\theta_{k-1} \in [a, b]$, tale che:

$$h(x_{k-1}) - h(\alpha) = h'(\theta_{k-1})(x_{k-1} - \alpha)$$

ovvero:

$$x_k - \alpha = h'(\theta_{k-1})(x_{k-1} - \alpha)$$

Allora, utilizzando l'ipotesi (2):

$$|\, x_k - \alpha\, | = |\, h'(\theta_{k-1})\, |\, |\, x_{k-1} - \alpha\, | \leqslant L\, |\, x_{k-1} - \alpha\, |$$

Ripetendo il ragionamento a partire da $x_{k-1} - \alpha$ si ottiene:

$$|\, x_{k-1} - \alpha\, | \leqslant L\, |\, x_{k-2} - \alpha\, |$$

e quindi:

$$|\, x_k - \alpha\, | \leqslant L^2\, |\, x_{k-2} - \alpha\, |$$

Iterando all'indietro si ha infine:

$$0 \leqslant |\, x_k - \alpha\, | \leqslant L^k\, |\, x_0 - \alpha\, |$$

Poiché $L < 1$ la successione $L^k\, |\, x_0 - \alpha\, |$, e quindi $|\, x_k - \alpha\, |$, tende a zero.

Il ruolo del numero reale γ (il *valore iniziale* della successione) nel Teorema precedente è di garantire il sussistere dell'ipotesi (3), ovvero che il metodo definito da h generi una successione in $[a, b]$. L'Osservazione che segue fornisce, sotto opportune ipotesi, *un valore* che soddisfa la richiesta.

1.3.4 Osservazione (Criterio di scelta del valore iniziale per metodi ad un punto)

Siano $[a, b]$ un intervallo ed $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua che verificano le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza. Allora, detto α il punto unito di h in $[a, b]$, l'elemento:

$$\gamma = \text{l'estremo di } [a, b] \text{ più vicino ad } \alpha$$

verifica l'ipotesi (3) del Teorema di convergenza.

Dimostrazione. Sia $d = |\,\gamma - \alpha\,|$ e I l'intorno chiuso di centro α e raggio d. Per come definito γ si ha $I \subset [a, b]$. Sia ora $x \in I$. Allora: $|\,h(x) - \alpha\,| = |\,h(x) - h(\alpha)\,|$ e, utilizzando il Teorema di Lagrange: esiste un numero reale θ compreso tra x e α, e quindi $\theta \in [a, b]$, tale che: $h(x) - h(\alpha) = h'(\theta)(x - \alpha)$, dunque $|\,h(x) - \alpha\,| = |\,h'(\theta)\,|\,|\,x - \alpha\,|$. Utilizzando l'ipotesi (2): $|\,h(x) - \alpha\,| \leqslant L\,|\,x - \alpha\,| < |\,x - \alpha\,| \leqslant d$, ovvero $h(x) \in I$. Ne segue che se $x_0 \in I \subset [a, b]$ allora per ogni numero intero positivo k si ha: $x_k = h(x_{k-1}) \in I \subset [a, b]$.

L'esempio che segue mostra l'uso del Teorema di convergenza e del Criterio di scelta del valore iniziale.

1.3.5 Esempio

Sia f la funzione definita, per ogni $x > 0$, da: $f(x) = x + \log x$. Poiché per ogni $x > 0$ si ha $f'(x) = 1 + 1/x > 0$, la funzione f ha *al più* uno zero. L'*esistenza* di uno zero si ottiene osservando che:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Infine, essendo $f(1) = 1 > 0$, l'intervallo $(0, 1)$ *separa* lo zero di f.[19]

Sia α lo zero di f. Per approssimare α si considerano i metodi ad un punto definiti dalle funzioni (continue):

$$h_1(x) = -\log x \qquad , \qquad h_2(x) = e^{-x} \qquad , \qquad h_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$$

Si verifica facilmente (esercizio!) che i punti uniti di ciascuna di esse sono *tutti e soli* gli zeri di f. Dunque ciascuna ha *un solo* punto unito in $(0, 1)$.

Per ciascuno dei tre metodi ci si domanda se sia *utilizzabile*, ovvero se sia possibile *determinare un intervallo che, insieme alla funzione che definisce il metodo, soddisfa le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza.* Se il metodo risulta utilizzabile, *si utilizza il Criterio di scelta del punto iniziale* per determinare un valore a partire dal quale la successione generata dal metodo ad un punto risulta *convergente* ad α.

– *Metodo definito da h_1.*

  La funzione h_1 ha derivata prima continua. L'ipotesi (1) del Teorema di convergenza richiede un intervallo *chiuso* su cui h_1 è definita e che include il punto unito. L'intervallo $[0, 1]$ non è utilizzabile: la funzione h_1 non è definita in 0. Un intervallo che soddisfa le richieste è $[\frac{1}{2}, 1]$, ottenuto constatando che nel punto medio dell'intervallo $[0, 1]$ la funzione f assume valore *negativo* ed utilizzando il Teorema di esistenza degli zeri.

  Scelto l'intervallo, studiamo la *derivata prima* di h_1. Per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

$$|\,h_1'(x)\,| = \frac{1}{x} \geqslant 1$$

  dunque l'ipotesi (2) *non è verificata.* In questo caso *non esiste* un intervallo che verifica le ipotesi (1) e (2) perché essendo $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ si ha certamente:

$$|\,h_1'(\alpha)\,| > 1$$

  Il metodo è *non utilizzabile.*

– *Metodo definito da h_2.*

  La funzione h_2 ha derivata prima continua. L'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ verifica l'ipotesi (1). Inoltre per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

$$|\,h_2'(x)\,| = e^{-x} \leqslant L_2 = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$

  dunque è verificata anche l'ipotesi (2): il metodo è *utilizzabile.* Poiché $f(\frac{3}{4}) > 0$, per il Criterio di scelta del punto iniziale la successione x_k generata a partire da $\gamma = \frac{1}{2}$ è convergente ad α.

  Essendo $h_2'(x) < 0$ per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, utilizzando il Teorema di Lagrange si può dedurre la seguente *proprietà qualitativa* della successione: per ogni k le differenze $x_k - \alpha$ e $x_{k+1} - \alpha$ sono non nulle ed *hanno segno opposto*, ovvero: x_k ed x_{k+1} sono "da parti opposte" rispetto ad α.

[19]Ovvero: è un intervallo di misura *finita* che include *un solo* zero di f.

– *Metodo definito da* h_3.

La funzione h_3 ha derivata prima continua e l'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ verifica l'ipotesi (1). Inoltre per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

$$|\, h_3'(x)\,| = \frac{1 - e^{-x}}{2} \leqslant L_3 = \frac{1 - 1/e}{2} < 1$$

dunque è verificata anche l'ipotesi (2): il metodo è *utilizzabile*. Come già stabilito studiando il metodo definito da h_2, per il Criterio di scelta del punto iniziale la successione x_k generata a partire da $\gamma = \frac{1}{2}$ è convergente ad α.

Essendo $h_3'(x) > 0$ per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, utilizzando il Teorema di Lagrange si può dedurre la seguente *proprietà qualitativa* della successione generata a partire da *qualsiasi* $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$: per ogni k le differenze $x_k - \alpha$ sono non nulle ed *hanno lo stesso segno*, ovvero: x_k ed x_{k+1} sono "dalla stessa parte" rispetto ad α. Allora: (a) poiché la successione delle *distanze* $|\, x_k - \alpha\,|$ è, come sappiamo dalla dimostrazione del Teorema di convergenza, *decrescente*, si conclude che la successione x_k è *monotona* e: (b) gli elementi della successione sono compresi tra γ ed α, dunque la successione è *limitata*, dunque *convergente*. Nel caso in esame, $\gamma = \frac{1}{2}$, la successione è monotona crescente.

1.3.6 Osservazione (metodo utilizzabile per approssimare un punto unito)

Si è scelto di dichiarare un metodo *utilizzabile* (*per approssimare un punto unito* α) quando *è possibile determinare un intervallo che, insieme alla funzione che definisce il metodo, soddisfi le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza.*

Un metodo è certamente utilizzabile se è definito da una funzione h con derivata prima continua e nel punto unito in esame si ha $|\, h'(\alpha)\,| < 1$. In tal caso, infatti, la continuità di $h'(x)$ garantisce l'esistenza di un intervallo chiuso che contiene α e in tutti i punti x del quale di ha $|\, h'(x)\,| < 1$. Osservando che se l'ipotesi (2) del Torema di convergenza è soddisfatta allora si ha $|\, h'(\alpha)\,| < 1$, si conclude che:

un metodo è utilizzabile per approssimare il punto unito α se e solo se $|\, h'(\alpha)\,| < 1$

Una *condizione sufficiente* di *non* utilizzabilità di un metodo è che esso sia definito da una funzione h con derivata prima continua e che nel punto unito in esame si abbia $|\, h'(\alpha)\,| > 1$ (è la situazione incontrata analizzando il metodo definito da h_1). La *non utilizzabiltà* del metodo in questo caso è motivata dall'osservazione che si ha: *Se* x_k è una successione generata dal metodo ad un punto definito da h *allora*:

$$x_k \text{ è definitivamente uguale a } \alpha \qquad \text{oppure} \qquad x_k \text{ non converge ad } \alpha \qquad (*)$$

(*Dimostrazione.* Supponiamo che per ogni k sia $x_k \neq \alpha$. Dobbiamo dimostrare che, allora, x_k non converge ad α.

Si osservi, preliminarmente, che poiché h' è una funzione continua e $h'(\alpha) > 1$, esistono due numeri reali positivi ρ e δ tali che: $|\, h'(x)\,| > 1 + \delta$ per ogni x nell'intorno $I_\rho(\alpha)$ di centro α e raggio ρ.

Adesso, procedendo *per assurdo*, supponiamo che $\lim x_k = \alpha$. Allora esiste un numero intero positivo n tale che $x_k \in I_\rho(\alpha)$ per ogni $k \geqslant n$. Sia poi m un numero intero tale che:

$$m > n \qquad \text{e} \qquad (1 + \delta)^m > \frac{\rho}{|\, x_0 - \alpha\,|}$$

Utilizzando ripetutamente il Teorema di Lagrange si ottiene che esistono $\theta_{m-1}, \ldots, \theta_0 \in I_\rho(\alpha)$ tali che:

$$|\, x_m - \alpha\,| = |\, h'(\theta_{m-1})\,| \cdots |\, h'(\theta_0)\,|\,|\, x_0 - \alpha\,|$$

Ma per ogni $j = 0, \ldots, m-1$ si ha: $|\, h'(\theta_j)\,| > 1 + \delta$ e quindi:

$$|\, x_m - \alpha\,| = |\, h'(\theta_{m-1})\,| \cdots |\, h'(\theta_0)\,|\,|\, x_0 - \alpha\,| > (1 + \delta)^m\,|\, x_0 - \alpha\,| > \rho$$

ovvero $x_m \notin I_\rho(\alpha)$. Questo è assurdo perchè, essendo $m > n$, si ha $x_m \in I_\rho(\alpha)$.)

Dunque: anche se $|\, h'(\alpha)\,| > 1$, il metodo *può* generare successioni convergenti ad α (se ne ottiene una, ad esempio, scegliendo come valore iniziale α) ma *non è ragionevole* supporre di poter ottenere un valore iniziale *praticamente utilizzabile* per la costruzione di una successione convergente.

Anche la condizione $|\, h'(\alpha)\, | = 1$ è *sufficiente* per dichiarare il metodo *non* utilizzabile, ma in questo caso non necessariamente sussiste l'asserto $(*)$. Ritorneremo a discutere questa condizione dopo aver introdotto la nozione di *ordine di convergenza* di un metodo.

Esercizi

E11 Sia $h(x) = \frac{1}{2}\cos x$.

(1) Dimostrare che l'intervallo $[0, \pi/2]$ *separa* un punto unito, α, di h.

(2) Constatare che le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza sono verificate con $[a, b] = [0, \pi/2]$.

(3) Dimostrare che *se* $x \in [0, \pi/2]$ *allora* $h(x) \in [0, \pi/2]$.

(4) Determinare *tutti* i valori $\gamma \in [0, \pi/2]$ a partire dai quali la successione generata dal metodo definito da h risulta convergente ad α.

E12 Sia $h(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = 3 - \frac{1}{2}x$. Dimostrare che h ha derivata prima continua e che le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza sono verificate con $[a, b] = [1, 7]$. Discutere gli assegnamenti $z = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, 7)$ e $z = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, 1)$.

E13 Dimostrare la *versione lipschitziana* del Teorema di convergenza:

Siano $[a, b]$ un intervallo, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e γ un elemento di $[a, b]$ tali che:

(1) esiste α punto unito di h in $[a, b]$;

(2) esiste $L \in [0, 1)$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ si ha: $|\, h(x) - h(y)\, | \leqslant L\, |\, x - y\, |$;[20]

(3) la procedura $\mathit{MetodoUnPunto}\,(h, \gamma)$ genera una successione x_k in $[a, b]$.

Allora: (i) α è l'*unico* punto unito di h in $[a, b]$ e (ii) la successione x_k è *convergente* ad α.

E14 ★ Si consideri una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con derivata seconda su (a, b).

(1) Dimostrare che *se* $\alpha < \beta < \gamma$ sono tre zeri di f in $[a, b]$ *allora* esiste $c \in (a, b)$ tale che $f''(c) = 0$. (Suggerimento: applicare il Teorema di Rolle[21] prima alla funzione f poi ad f'.)

(2) Dedurne che: *se* per ogni $x \in (a, b)$ si ha $f''(x) \neq 0$ *allora* f ha *al più* due zeri in $[a, b]$.

In generale si ha: *se* la funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha derivata k-esima su (a, b) e per ogni $x \in (a, b)$ si ha $f^{(k)}(x) \neq 0$ *allora* f ha *al più* k zeri in $[a, b]$.

E15 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che: per ogni x si ha $f^{(3)}(x) \neq 0$, per ogni $x < 0$ si ha $f'(x) \neq 0$, $f(-1) > 0$ e $f(0) < 0$. Cosa si può dedurre riguardo agli zeri di f?

E16 ★ Sia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Applicare i risultati dell'Esercizio *E14* alla funzione f definita da $f(x) = x - h(x)$ e dedurne condizioni sufficienti affinché h abbia *al più* uno o, rispettivamente, *al più* due punti uniti in $[a, b]$.

Nell'Esempio 1.3.5 si sono trovati *due* metodi utilizzabili per approssimare lo zero α di f. Per decidere se uno dei due metodi sia da preferirsi rispetto all'altro studiamo la *rapidità di convergenza* ad α delle successioni generate.

1.3.7 Definizione (ordine di convergenza di un metodo ad un punto)

Siano $[a, b]$, h e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza e supponiamo che per la successione x_k, convergente ad α, si abbia $x_k \neq \alpha$ per ogni k.

[20] Una funzione che verifica questa proprietà si chiama *contrazione* su $[a, b]$. La disuguaglianza significa, infatti, che h "contrae" la distanza tra x ed y.

[21] Se la funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile su (a, b) e $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

– *Se* $h'(\alpha) \neq 0$ *allora*, eventualmente restringendo $[a,b]$, si ha:

$$0 < \lambda = \min_{[a,b]} |\, h'(x)\,| \leqslant \max_{[a,b]} |\, h'(x)\,| = L < 1$$

e quindi, per k maggiore o uguale ad un opportuno n:

$$\lambda^{k-n} |\, x_n - \alpha\,| \leqslant |\, x_k - \alpha\,| \leqslant L^{k-n} |\, x_n - \alpha\,|$$

ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *almeno* rapidamente come L^k ma *non più* rapidamente di λ^k. Restringendo $[a,b]$ e considerando k sufficientemente grande si conclude che:

$$x_k \text{ tende ad } \alpha \text{ come } |\, h'(\alpha)\,|^k$$

– *Se* $h'(\alpha) = 0$[22] *allora*: per ogni $\theta > 0$ si ha:[23]

$$\lim \frac{|\, x_k - \alpha\,|}{\theta^k} = 0$$

ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *più rapidamente* di *qualsiasi* successione di tipo esponenziale.

Si chiama *ordine di convergenza* del metodo ad un punto definito da h quando utilizzato per approssimare il punto unito α: *il più piccolo numero intero* q *tale che* $h^{(q)}(\alpha) \neq 0$.

Si ha dunque (si ricordi che si stanno considerando solo le successioni x_k tali che $x_k \neq \alpha$ per ogni k):

– Se $h'(\alpha) \neq 0$, l'ordine di convergenza è *uno* e *per tutte* le successioni convergenti x_k generate dal metodo la distanza $|\, x_k - \alpha\,|$ tende a zero come $|\, h'(\alpha)\,|^k$.

– Se $h'(\alpha) = 0$, l'ordine è *almeno due* e per *tutte* le successioni convergenti x_k generate dal metodo la distanza $|\, x_k - \alpha\,|$ tende a zero più rapidamente di qualsiasi successione di tipo esponenziale. Dunque: *qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine due converge più rapidamente di qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine uno.*

– In generale: *qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine* p *converge più rapidamente di qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine minore di* p.

1.3.8 Osservazione

Siano h una funzione con derivata prima continua, α un punto unito di h, e $|\, h'(\alpha)\,| = 1$. Sia infine x_k una successione generata dal metodo iterativo definito da h. *Se* $\lim x_k = \alpha$ e per ogni k si ha $x_k \neq \alpha$ *allora*:[24]

$$\textit{per ogni } \theta \in (0,1) \textit{ si ha:} \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{|\, x_k - \alpha\,|}{\theta^k} = +\infty$$

ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *più lentamente* di qualsiasi successione di tipo esponenziale.

1.3.9 Esempio (continuazione)

Per i due metodi utilizzabili individuati nell'Esempio 1.3.5 si ha:

$$|\, h_2'(\alpha)\,| = e^{-\alpha} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad |\, h_3'(\alpha)\,| = \frac{1 - e^{-\alpha}}{2} \neq 0$$

dunque entrambi hanno ordine di convergenza *uno*. Essendo poi:

$$|\, h_2'(\alpha)\,| = e^{-\alpha} > \frac{1 - e^{-\alpha}}{2} = |\, h_3'(\alpha)\,|$$

[22] E la funzione h ha *derivata seconda* continua.

[23] La dimostrazione dell'asserto è riportata nell'Appendice 1 di fine capitolo.

[24] La dimostrazione dell'asserto è riportata nell'Appendice 2 di fine capitolo.

si conclude che il metodo definito da h_3 genera una successione che tende ad α *più rapidamente* del metodo definito da h_2.

1.3.10 Osservazione (Studio grafico di un metodo ad un punto)
Si suppongano rappresentati, in uno stesso piano cartesiano, *i grafici* della funzione h e quello della funzione identità, entrambi su un intervallo (limitato) $[a, b]$.

- *Ricerca dei punti uniti di h in $[a, b]$.*

  I punti uniti di h in $[a, b]$ sono *le ascisse dei punti di intersezione* dei due grafici. Infatti, se $A \equiv (\bar{x}, \bar{y})$[25] è uno dei punti di intersezione si ha: $\bar{y} = \bar{x}$ (perché A fa parte del grafico della funzione identità) e $\bar{y} = h(\bar{x})$ (perché A fa parte del grafico della funzione h) e quindi $\bar{x} = h(\bar{x})$.

- *Costruzione di un elemento della successione generata dal metodo.*

  Assegnato un elemento x in $[a, b]$ è possibile rappresentare $h(x)$ sull'asse delle ascisse con la costruzione seguente:

  (1) Si disegna la retta *verticale* passante per il punto $P \equiv (x, 0)$ e si individua il punto $Q \equiv (x, h(x))$ intersezione della retta con il grafico di h.
  (2) Si disegna la retta *orizzontale* passante per il punto Q e si individua il punto $R \equiv (h(x), h(x))$ intersezione della retta con il grafico della funzione identità.
  (3) Si disegna la retta *verticale* passante per il punto R e si individua il punto $S \equiv (h(x), 0)$ intersezione della retta con l'asse delle ascisse.

- *Studio dell'utilizzabilità del metodo.*

  Sia $A \equiv (\alpha, 0)$ un punto di intersezione dei due grafici. Per studiare l'utilizzabilità del metodo per approssimare α:

  (i) Si considerano la retta t tangente al grafico di h in A, la retta b grafico della funzione identità (già presente nel disegno) e la retta p grafico della funzione $x \mapsto \alpha - x$, e
  (ii) Si *ruota* la retta b intorno al punto A in senso *orario.*

  Si ha: $|\, h'(\alpha) \,| < 1$ *se e solo se* $t \neq b, t \neq p$ e nella rotazione b si sovrappone *prima* a t e *poi* a p.

Esercizi

E17 ★ Si consideri la funzione h_3 definita nell'Esempio 1.3.5. Per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha $h_3'(x) > 0$. Dimostrare che:

(1) *se* $x \in [\frac{1}{2}, \alpha)$ *allora* $h_3(x) \in (x, \alpha)$.
(2) *se* $x \in (\alpha, 1]$ *allora* $h_3(x) \in (\alpha, x)$.

Dedurne che *se* $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ *allora* $h(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ e quindi che *per ogni* $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ la successione generata dal metodo definito da h_3 *converge* ad α.

E18 ★ Siano $[a, b]$, h e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza. Inoltre, per ogni $x \in [a, b]$ sia:

$$\lambda \leqslant |\, h'(x) \,| \leqslant L$$

Dimostrare che, allora:

$$\lambda^k |\, x_0 - \alpha \,| \leqslant |\, x_k - \alpha \,| \leqslant L^k |\, x_0 - \alpha \,|$$

E19 Sia f la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$ da $f(x) = x - e^{x-2}$.

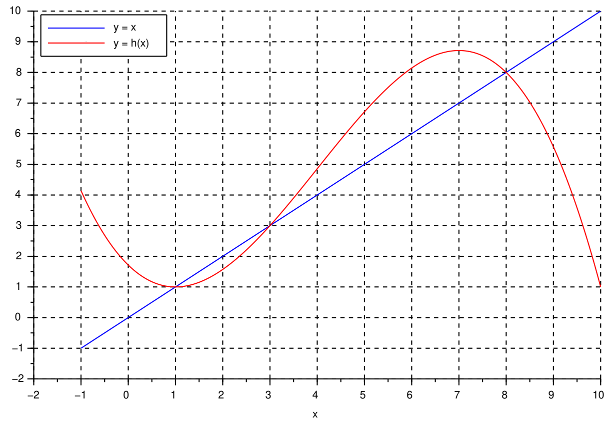
(1) Dimostrare che f ha *due* zeri e *separarli.*

[25] Il simbolo $\equiv$ si legge: "di coordinate."

(2) Dimostrare che i punti uniti della funzione h definita da $h(x) = e^{x-2}$ sono *tutti e soli* gli zeri di f.

(3) Dimostrare, prima *graficamente* poi *analiticamente*, che il metodo ad un punto definito da h è *utilizzabile* per approssimare uno degli zeri (ed il metodo risulta di *ordine uno* quando utilizzato per approssimare tale zero) e *non utilizzabile* per l'altro.

E20 Nella figura seguente, generata da *Scilab*, sono rappresentati, sull'intervallo $I = [-1, 10]$, il grafico della funzione $h : I \to \mathbb{R}$ (in rosso) e quello della funzione identità (in blu).



Individuare i punti uniti di h e, per ciascuno di essi: decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione ed eventualmente indicare l'ordine di convergenza.

1.4 Metodo di Newton

Tra tutti i metodi ad un punto, il *metodo di Newton* è di uso particolarmente frequente.

1.4.1 Definizione (metodo di Newton)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con derivata *prima* continua e per ogni $x \in [a, b]$ sia $f'(x) \neq 0$. Il *metodo di Newton* (*applicato ad* f) è il metodo ad un punto definito dalla funzione:

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Siano dunque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata *prima* continua tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e h la funzione che definisce il metodo di Newton.

1.4.2 Osservazione (utilizzabilità e ordine di convergenza del Metodo di Newton)
Per quanto mostrato nell'Esempio 1.3.2, *i punti uniti di h sono* tutti e soli *gli zeri di* f.
Inoltre: Se f ha derivata *seconda* continua si ha:

$$h'(x) = \frac{f^{(2)}(x) f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

e quindi, detto α uno zero di f:

$$h'(\alpha) = 0$$

Si deduce che:

– Per quanto detto nell'Osservazione 1.3.6, la condizione $|\, h'(\alpha) \,| = 0 < 1$ è *sufficiente* per poter affermare che *il metodo di Newton è utilizzabile per approssimare* α.

– Il metodo ha *ordine di convergenza almeno due* quando utilizzato per approssimare α.

1.4.3 Osservazione (Interpretazione geometrica del Metodo di Newton: metodo delle tangenti)
Si rappresenti su un piano cartesiano il grafico della funzione f su $[a,b]$. Assegnato $z \in [a,b]$ il valore $h(z)$ si determina con la seguente costruzione grafica:

- Si disegna la retta t tangente al grafico di f nel punto $P \equiv (z, f(z))$;
- Si determina i punto $Q \equiv (\bar{z}, 0)$ intersezione di t con l'asse delle ascisse (l'intersezione è un punto perché, essendo $f'(z) \neq 0$, la retta t non è orizzontale): si ha $\bar{z} = h(z)$.

Infatti: L'equazione della retta tangente t è:

$$y = f'(z)(x-z) + f(z)$$

da cui si ricava l'ascissa di Q:

$$0 = f'(z)(x-z) + f(z) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = h(z)$$

1.4.4 Osservazione (Criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton)
Siano f con derivata *seconda* continua ed I un intervallo contenente α zero di f e tale che:

$$\text{per ogni } x \in I \text{ si ha } f'(x) \neq 0 \text{ e } f^{(2)}(x) \neq 0$$

Sia infine γ un elemento di I, certamente esistente (perché ?), tale che:

$$f(\gamma) f^{(2)}(\gamma) > 0$$

Allora: la successione generata dal metodo di Newton a partire da γ *è convergente* ad α e *monotona*.

Dimostrazione: Per via grafica, in un caso particolare, si dimostra che la successione è monotona e limitata, dunque *convergente*. Il limite della successione è uno zero di f, ovvero un punto unito della funzione h, perché la successione è generata da un metodo ad un punto definito da una funzione *h continua*.

1.4.5 Esempio
Sia $f(x) = x + \log x$, definita per ogni $x > 0$. Sappiamo già che f ha un solo zero, α, separato dall'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$. La funzione f ha derivata prima *sempre positiva* e derivata seconda continua, dunque *il metodo di Newton è utilizzabile* per approssimare α. Inoltre, la derivata seconda è *sempre negativa*, dunque il criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton è utilizzabile e stabilisce che *per ogni* $\gamma \in [\frac{1}{2}, \alpha)$ la successione generata dal metodo di Newton converge allo zero ed è monotona crescente. Si osservi che, non essendo noto il valore di α, l'unico punto accessibile di quest'ultimo intervallo è $\frac{1}{2}$.

1.5 Criteri d'arresto per metodi ad un punto

I criteri d'arresto studiati per il metodo di bisezione si basano sulla costruzione di una successione di intervalli che racchiudono uno zero di f. I metodi ad un punto, in particolare il metodo di Newton, *non* costruiscono successioni di intervalli. Occorrono quindi criteri d'arresto diversi.

1.5.1 Definizione (criterio d'arresto di tipo assoluto, 1)
Siano h, $[a,b]$ e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza e x_k la successione generata dal metodo ad un punto definito da h a partire da γ, convergente al punto unito α.

Si consideri il seguente criterio d'arresto: dato un numero reale positivo δ,

$$\textit{se } |\, h(x_k) - x_k \,| < \delta \textit{ allora } \text{esci dal ciclo}$$

- Il criterio è *calcolabile*.
- Il criterio è *efficace*. Infatti:

  $$|\, h(x_k) - x_k \,| = |\, h(x_k) - h(x_{k-1}) \,| \leqslant L \,|\, h(x_{k-1}) - x_{k-1} \,|$$

  e quindi:

(a) iterando all'indietro si ottiene:

$$| h(x_k) - x_k | \leqslant L^k \, | h(x_0) - x_0 |$$

ovvero la successione $| h(x_k) - x_k |$ tende a zero (*almeno* come L^k) dunque per ogni $\delta > 0$ la disuguaglianza è *certamente soddisfatta dopo un numero finito di iterazioni*;

(b) poiché $L < 1$ si ha:

$$| h(x_k) - x_k | < | h(x_{k-1}) - x_{k-1} |$$

ovvero la successione $| h(x_k) - x_k |$ è *decrescente.*

– Si ha:

$$h(x_k) - x_k = h(x_k) - h(\alpha) + \alpha - x_k$$

Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra x_k ed α tale che:

$$h(x_k) - h(\alpha) = h'(\theta_k)(x_k - \alpha)$$

da cui:

$$h(x_k) - x_k = \big(h'(\theta_k) - 1\big)(x_k - \alpha)$$

Poiché $\theta_k \in [a, b]$ allora $h'(\theta_k) < 1$ e $h'(\theta_k) - 1 < 0$. Dunque:

$$| x_k - \alpha | = \frac{| h(x_k) - x_k |}{1 - h'(\theta_k)}$$

Il criterio usa $| h(x_k) - x_k |$ per *stimare* l'errore assoluto $| x_k - \alpha |$ ed è quindi un criterio *di tipo assoluto* e quando la condizione del criterio d'arresto è verificata si ha:

$$| x_k - \alpha | < \frac{\delta}{1 - L}$$

Usualmente l'intorno di centro α e raggio $\delta/(1-L)$ è *molto più piccolo* di $[a, b]$ ed è ragionevole l'approssimazione $\theta_k \approx \alpha$ e quindi, per la continuità di h', l'approssimazione $h'(\theta_k) \approx h'(\alpha)$. Dunque quando la condizione del criterio è verificata si approssima::

$$| x_k - \alpha | < \frac{\delta}{1 - h'(\alpha)}$$

Analogamente, per k grande si ha: $\theta_k \approx \alpha$ e quindi $h'(\theta_k) \approx h'(\alpha)$ e:

– Se $h'(\alpha) = 0$ si ha $| x_k - \alpha | \approx | h(x_k) - x_k |$ e il criterio d'arresto interrompe la costruzione *appena* l'approssimazione è sufficientemente accurata. Questo è il caso, ad esempio, del *metodo di Newton* nel qual caso si ha anche:

$$| h(x_k) - x_k | = \left| \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right|$$

– Se $h'(\alpha) \approx 1$ si ha $| x_k - \alpha | \gg | h(x_k) - x_k |$ e il criterio rischia di arrestare la costruzione quando $| x_k - \alpha | > \delta$, dunque con un'approssimazione *non* sufficientemente accurata.

– Se $h'(\alpha) \approx -1$ si ha $| x_k - \alpha | \approx \frac{1}{2} | h(x_k) - x_k |$. Il criterio arresta la costruzione non appena $| h(x_k) - x_k | < \delta$ e in tal caso x_k è un'approssimazione sufficientemente accurata di α *ma* la condizione $| x_n - \alpha | < \delta$ potrebbe essere stata già verificata per $n < k$: il criterio rischia di accorgersi *in ritardo* che l'approssimazione è sufficientemente accurata.

Il criterio d'arresto è introdotto nella procedura *MetodoUnPunto* modificandola come segue:

- $z = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, \gamma, \delta)$

  // $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione *continua*, $\gamma \in [a, b]$, δ numero reale *positivo.*

  $x_0 = \gamma;$

  $k = 0;$

`ripeti`:

  `se` $\big(x_k \notin [a,b]$ `oppure` $|\, h(x_k) - x_k \,| < \delta \big)$ `allora` esci dal ciclo;

  $x_{k+1} = h(x_k)$;

  $k = k + 1$;

$z = x_k$

Si osservi che quando il criterio è verificato la procedura restituisce un elemento $x_k \in [a,b]$ tale che:

$$|\, h(x_k) - x_k \,| < \delta$$

e sussiste la seguente *interpretazione*: x_k è *punto unito* di una funzione $h^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ *vicina* ad h nel senso che:

$$\text{per ogni } x \in [a,b] \text{ si ha:} \quad |\, h^*(x) - h(x) \,| < \delta$$

Infatti, sia $h^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$h^*(x) = h(x) - \big(h(x_k) - x_k \big)$$

Allora:

$$h^*(x_k) = h(x_k) - h(x_k) + x_k = x_k$$

dunque x_k è punto unito di h^*. Inoltre per ogni $x \in [a,b]$ è:

$$|\, h^*(x) - h(x) \,| = |\, h(x_k) - x_k \,| < \delta$$

Questa interpretazione *non fornisce direttamente informazioni sull'accuratezza* di x_k come approssimazione di α. Per averle occorre studiare quanto distante può essere un punto unito di h^* dal punto unito di h in termini di δ. Come vedremo nella Sezione 1.6, *nel peggiore dei casi* si ha, coerentemente con quanto ottenuto sopra:

$$|x_k - \alpha| \approx \frac{\delta}{1 - h'(\alpha)}$$

1.5.2 Definizione (criterio d'arresto, 2)

Siano: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima f' *continua e sempre diversa da zero*, $\alpha \in (a,b)$ uno zero di f e x_k la successione *convergente* ad α generata dal metodo ad un punto scelto per l'approssimazione. Supponiamo che per ogni k sia $x_k \in (a,b)$.[26]

Si consideri il seguente criterio d'arresto: dato un numero reale positivo δ,

$$\textit{se } |\, f(x_k) \,| < \delta \textit{ allora} \text{ esci dal ciclo}$$

- Il criterio è *calcolabile* (supponendo che la procedura sappia calcolare f).
- Il criterio è *efficace*. Infatti, per la continuità di f si ha:

  $$x_k \to \alpha \qquad \Rightarrow \qquad f(x_k) \to f(\alpha) = 0$$

  Dunque, per ogni $\delta > 0$ la disuguaglianza è *certamente soddisfatta dopo un numero finito di iterazioni.*
- Essendo α zero di f si ha:

  $$f(x_k) = f(x_k) - f(\alpha)$$

  Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra x_k ed α tale che:

  $$f(x_k) - f(\alpha) = f'(\theta_k)(x_k - \alpha)$$

  da cui:

  $$f(x_k) = f'(\theta_k)\,(x_k - \alpha)$$

[26] Per la convergenza della successione ci si può sempre ricondurre a tale situazione eliminando un opportuno numero di termini iniziali e rinominando i restanti.

Poiché $\theta_k \in (a,b)$ allora $f'(\theta_k) \neq 0$, dunque:

$$|\, x_k - \alpha \,| = \left|\, \frac{f(x_k)}{f'(\theta_k)} \,\right|$$

Il criterio usa $|\, f(x_k) \,|$ per *stimare* l'errore assoluto $|\, x_k - \alpha \,|$ (ed è quindi un criterio *di tipo assoluto*) e quando la condizione del criterio d'arresto è verificata si ha, detto m_1 il minimo valore di $|\, f'(x) \,|$ per $x \in [a,b]$:

$$|\, x_k - \alpha \,| < \frac{\delta}{m_1}$$

Usualmente l'intorno di centro α e raggio δ/m_1 è *molto più piccolo* di $[a,b]$ ed è ragionevole l'approssimazione $\theta_k \approx \alpha$ e quindi, per la continuità di f', l'approssimazione $f'(\theta_k) \approx f'(\alpha)$. Dunque quando la condizione del criterio è verificata si approssima:

$$|\, x_k - \alpha \,| < \frac{\delta}{|f'(\alpha)|}$$

Analogamente, per k grande si ha: $\theta_k \approx \alpha$ e quindi $f'(\theta_k) \approx f'(\alpha)$ e:

- Se $|\, f'(\alpha) \,| = 1$ si ha $|\, x_k - \alpha \,| \approx |\, f(x_k) \,|$ e il criterio d'arresto interrompe la costruzione *appena* l'approssimazione è sufficientemente accurata.
- Se $|\, f'(\alpha) \,| \gg 1$ si ha $|\, x_k - \alpha \,| \ll |\, f(x_k) \,|$. Il criterio interrompe la costruzione non appena $|\, f(x_k) \,| < \delta$ e in tal caso x_k è un'approssimazione sufficientemente accurata di α *ma* la condizione $|\, x_n - \alpha \,| < \delta$ potrebbe essere stata già verificata per $n < k$: il criterio rischia di accorgersi *in ritardo* che l'approssimazione è sufficientemente accurata.
- Se $0 < |\, f'(\alpha) \,| \approx 0$ si ha $|\, x_k - \alpha \,| \gg |\, f(x_k) \,|$ e il criterio d'arresto rischia di interrompere la costruzione quando $|\, x_k - \alpha \,| > \delta$, dunque con un'approssimazione *non* sufficientemente accurata.

Il criterio d'arresto è introdotto nella procedura *MetodoUnPunto* modificandola come segue:

- $z = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, \gamma, \delta)$

  // $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione *continua*, $\gamma \in [a,b]$, δ numero reale *positivo*.

  $x_0 = \gamma;$

  $k = 0;$

  `ripeti`:

      `se` $\big(\, x_k \notin [a,b]$ `oppure` $|\, f(x_k) \,| < \delta \,\big)$ `allora` esci dal ciclo;

      $x_{k+1} = h(x_k);$

      $k = k+1;$

  $z = x_k$

Si osservi che quando il criterio è verificato, la procedura restituisce un elemento $x_k \in [a,b]$ tale che:

$$|\, f(x_k) \,| < \delta$$

e sussiste la seguente *interpretazione*: x_k è *zero* di una funzione $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ *vicina* ad f nel senso che:

$$\text{per ogni } x \in [a,b] \text{ si ha:} \quad |\, f^*(x) - f(x) \,| < \delta$$

Infatti, sia $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f^*(x) = f(x) - f(x_k)$$

Allora:

$$f^*(x_k) = f(x_k) - f(x_k) = 0$$

dunque x_k è zero di f^*. Inoltre per ogni $x \in [a,b]$ è:

$$|\, f^*(x) - f(x) \,| = |\, f(x_k) \,| < \delta$$

Questa interpretazione *non fornisce direttamente informazioni sull'accuratezza* di x_k come approssimazione di α. Per averle occorre studiare quando distante può essere uno zero di f^* dallo zero di f in termini di δ. Come vedremo nella Sezione 1.6, *nel peggiore dei casi* si ha, coerentemente con quanto ottenuto sopra:

$$|x_k - \alpha| \approx \frac{\delta}{|f'(\alpha)|}$$

1.6 Condizionamento del calcolo di uno zero o di un punto unito di una funzione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed α uno zero isolato di f. Siano poi $[a, b]$ un intervallo che separa α e $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua *vicina* ad f nel senso che:

esiste un numero reale $\delta > 0$ *piccolo* tale che: per ogni $x \in [a, b]$ si ha: $|\, f^*(x) - f(x)\,| \leqslant \delta$

Lo studio del *condizionamento* del calcolo di α consiste nel determinare quanto lontano da α può essere uno zero di f^* rispetto a δ.

In termini grafici, la relazione tra f e f^* si rilegge:

$$\text{per ogni } x \in [a, b] \text{ si ha: } f(x) - \delta \leqslant f^*(x) \leqslant f(x) + \delta$$

dunque *il grafico di f^* giace nella parte di piano compresa tra il grafico di $f(x) - \delta$ ed il grafico di $f(x) + \delta$.*

Consideriamo alcuni casi in cui f è *sufficientemente regolare.*

- Siano $f'(\alpha) \neq 0$, $[a, b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

  $$f(x) \approx f'(\alpha)(x - \alpha)$$

  e δ tale che $|\, f(a)\,|, |\, f(b)\,| > \delta$. In queste ipotesi f^* ha certamente qualche zero in $[a, b]$. Si consideri, ad esempio, la situazione rappresentata a sinistra in Figura 1, in cui è riportato a tratteggio nero il grafico di $f(x)$, in rosso quello di $f(x) + \delta$ e in blu quello di $f(x) - \delta$.

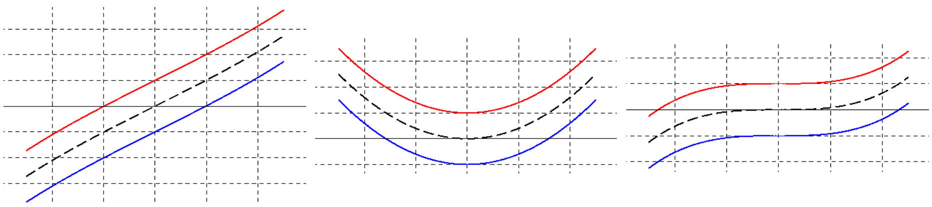


Figura 1: Grafici di f (nero), $f + \delta$ (rosso) e $f - \delta$ (blu).

  Come graficamente evidente, il più piccolo intervallo che certamente contiene gli zeri di f^* è quello di estremi le intersezioni con l'asse delle ascisse delle curve rossa e blu. Dunque, se α^* è uno zero di f^*, *nel peggiore dei casi* si ha:

  $$|\, \alpha^* - \alpha\,| \approx k\delta \quad \text{con} \quad k = 1/|\, f'(\alpha)\,|$$

  Lo scostamento è quindi *propozionale a δ* ed il condizionamento è *tanto peggiore* quanto più $f'(\alpha)$ è *vicino a zero*:

  $$\lim_{\delta \to 0} \frac{|\, \alpha^* - \alpha\,|}{\delta} = \frac{1}{|\, f'(\alpha)\,|}$$

- Siano $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$ e $[a, b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

  $$f(x) \approx \tfrac{1}{2}\, f''(\alpha)(x - \alpha)^2$$

  In questo caso, schematizzato al centro in Figura 1, il più piccolo intervallo che certamente contiene gli zeri di f^* è quello di estremi le intersezioni con l'asse delle ascisse della curva blu. Dunque, se α^* è uno zero di f^*, *nel peggiore dei casi* si ha:

  $$|\, \alpha^* - \alpha\,| \approx k\sqrt{\delta} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{2/|\, f''(\alpha)\,|}$$

Lo scostamento è proporzionale alla *radice quadrata* di δ e il calcolo di α è *mal condizionato*:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{|\,\alpha^* - \alpha\,|}{\delta} = +\infty$$

Si osservi anche che in questo caso, per quanto piccolo sia δ, il grafico di f^* potrebbe essere compreso tra le curve nera e rossa e f^* *non avere zeri* in $[a, b]$.

– Siano $f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0, f^{(3)}(\alpha) \neq 0$, $[a, b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

$$f(x) \approx \tfrac{1}{6}\, f^{(3)}(\alpha)(x-\alpha)^3$$

e δ tale che $|\,f(a)\,|, |\,f(b)\,| > \delta$. In questo caso, schematizzato a destra in Figura 1, f^* ha certamente qualche zero in $[a, b]$ e il più piccolo intervallo che certamente contiene gli zeri di f^* è quello di estremi le intersezioni con l'asse delle ascisse delle curve rossa e blu. Dunque, se α^* è uno zero di f^*, *nel peggiore dei casi* si ha:

$$|\,\alpha^* - \alpha\,| \approx k\sqrt[3]{\delta} \quad \text{con} \quad k = \sqrt[3]{6/|\,f^{(3)}(\alpha)\,|}$$

Lo scostamento è proporzionale alla *radice cubica* di δ e il calcolo di α è *mal condizionato*:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{|\,\alpha^* - \alpha\,|}{\delta} = +\infty$$

Da questi esempi si deduce che *l'unico caso in cui il calcolo di α è ben condizionato è quello in cui $f'(\alpha)$ è non troppo piccolo.*

1.6.1 Osservazione (condizionamento per funzioni dipendenti da un parametro)

Sia $f(x; t)$ una funzione *regolare* della variabile x e del parametro reale t. Sia poi $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che: $f(\alpha; 0) = 0$. Se per la derivata parziale di f rispetto ad x si ha:

$$\partial_x f(\alpha; 0) \neq 0$$

allora (Teorema delle funzioni implicite[27]) esiste una funzione regolare $z(t)$, definita in un intorno I di 0, tale che:

$$\text{(a)} \quad z(0) = \alpha \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \quad \text{per ogni } t \in I \text{ si ha} \quad f\big(z(t); t\big) = 0$$

La funzione z descrive quindi *come varia* lo zero in funzione di t.

La regolarità di z consente di ottenere *un'approssimazione dello scostamento dello zero da α per t piccolo*:

$$z(t) \approx z(0) + z'(0)\,t \quad \text{ovvero} \quad z(t) - \alpha \approx z'(0)\,t$$

Per l'uguaglianza (b) e per la regolarità di f e z si ottiene:

$$\frac{d}{dt} f\big(z(t); t\big)\bigg|_{t=0} = \partial_x f\big(z(0); 0\big)\, z'(0) + \partial_t f\big(z(0); 0\big) = 0$$

e quindi:

$$z'(0) = -\frac{\partial_t\big(z(0); 0\big)}{\partial_x\big(z(0); 0\big)}$$

dunque:

$$z(t) - \alpha \approx -\frac{\partial_t\big(z(0); 0\big)}{\partial_x\big(z(0); 0\big)}\, t$$

1.6.2 Esempio

Sia:

$$f(x; t) = (x - \tfrac{1}{10})(x - 10) + t$$

[27] Si veda ad esempio: `https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_delle_funzioni_implicite`.

Posto $\alpha_1 = \frac{1}{10}$ e $\alpha_2 = 10$ si ha:

$$f(\alpha_1; 0) = 0 \quad \text{e} \quad f(\alpha_2; 0) = 0$$

Inoltre:

$$\partial_x f(x; t) = 2x - (10 + \tfrac{1}{10})$$

e quindi:

$$\partial_x(\alpha_1; 0) = -\tfrac{99}{10} \neq 0 \quad \text{e} \quad \partial_x(\alpha_2; 0) = \tfrac{99}{10} \neq 0$$

Allora:

$$\frac{\partial_t\big(\alpha_1; 0\big)}{\partial_x\big(\alpha_1; 0\big)} = \frac{10}{99} \quad \text{e} \quad \frac{\partial_t\big(\alpha_2; 0\big)}{\partial_x\big(\alpha_2; 0\big)} = -\frac{10}{99}$$

Misurando lo scostamento degli zeri con l'errore *assoluto* si ha:

$$z(t) - \alpha_1 \approx \tfrac{10}{99}\, t \quad \text{e} \quad z(t) - \alpha_2 \approx -\tfrac{10}{99}\, t$$

e gli zeri subiscono uno scostamento, in valore assoluto, circa uguale.

Se si sceglie di misurare lo scostamento degli zeri con l'errore *relativo* si ha:

$$\frac{z(t) - \alpha_1}{\alpha_1} \approx \tfrac{100}{99}\, t \quad \text{e} \quad \tfrac{z(t)-\alpha_2}{\alpha_2} \approx -\tfrac{1}{99}\, t$$

In questo caso lo zero α_1 subisce uno scostamento, in valore assoluto, cento volte maggiore di quello subito dallo zero α_2.

Consideriamo adesso il condizionamento del calcolo di un *punto unito* di una funzione.

Siano h una funzione *sufficientemente regolare* ed α un punto unito isolato di h tali che $|h'(\alpha)| < 1$. Siano poi $[a, b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

$$h(x) \approx \alpha + h'(\alpha)(x - \alpha)$$

e $h^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua *vicina* ad h nel senso che:

esiste un numero reale $\delta > 0$ *piccolo* tale che: per ogni $x \in [a, b]$ si ha: $|\, h^*(x) - h(x)\,| \leqslant \delta$

Lo studio del *condizionamento* del calcolo di α consiste nel determinare quanto lontano da α può essere un punto unito di h^* rispetto a δ.

Procedendo come nel caso del condizionamento del calcolo di uno zero si ottiene: Se α^* è un punto unito di h^*, *nel peggiore dei casi* si ha:

$$|\, \alpha^* - \alpha\,| \approx k\delta \quad \text{con} \quad k = 1/\big(1 - h'(\alpha)\big)$$

Lo scostamento è quindi *proporzionale a* δ ed il condizionamento è *tanto peggiore* quanto più $h'(\alpha)$ è *vicino a uno*:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{|\, \alpha^* - \alpha\,|}{\delta} = \frac{1}{1 - h'(\alpha)}$$

1.7 Uso del tipo *numero in virgola mobile e precisione finita* nei metodi ad un punto

In questa sezione si discute l'esecuzione in *Scilab* delle procedure definite nelle Definizioni 1.5.1 e 1.5.2.

Si assume, per semplicità, $M = F(2, 53)$ — si veda l'Osservazione 0.1.15 — e si indicano, come usuale, con rd e u, rispettivamente, la funzione arrotondamento e la precisione di macchina in M.

Siano h, $[a, b]$ e $\gamma \in M$ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza. Detto α il punto unito di h in $[a, b]$, la successione di numeri reali x_k generata dal metodo ad un punto definito da h a partire da $x_0 = \gamma$ è convergente ad α e $x_k \in [a, b]$ per ogni k. Sia poi $\phi : [a, b] \to M$ un algoritmo *uniformemente accurato* quando utilizzato per approssimare i valori di h in $[a, b] \cap M$, ovvero:

esiste un numero reale d_h *piccolo* tale che per ogni $\theta \in [a, b] \cap M$ si ha: $\quad |\phi(\theta) - h(\theta)| \leqslant d_h$

e tale che la successione ξ_k di elementi di M definita da

$$\xi_0 = \gamma \qquad \text{e} \qquad \xi_{k+1} = \phi(\xi_k) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

è contenuta nell'intervallo $[a, b]$.

1.7.1 Teorema (stabilità dei metodi ad un punto)

Se l'istruzione `MetodoUnPunto(`h, γ, δ`)` eseguita in *Scilab* definisce un elemento $\xi \in M$ tale che:

$$|\, \phi(\xi) \ominus \xi \,| < \mathrm{rd}(\delta)$$

allora ξ è un punto unito di una funzione $h^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ *vicina* ad h nel senso che:

$$\text{per ogni } x \in [a, b] \text{ si ha:} \quad |h^*(x) - h(x)| \leqslant d_h + \delta$$

Se $\psi : [a, b] \to M$ è un algoritmo *uniformemente accurato* quando utilizzato per approssimare i valori di f in $[a, b] \cap M$, ovvero:

esiste un numero reale d_f *piccolo* tale che per ogni $\theta \in [a, b] \cap M$ si ha: $\quad |\psi(\theta) - f(\theta)| \leqslant d_f$

e l'istruzione `MetodoUnPunto(`h, γ, δ`)` eseguita in *Scilab* definisce un elemento $\xi \in M$ tale che:

$$|\, \psi(\xi) \,| < \mathrm{rd}(\delta)$$

allora ξ è uno zero di una funzione $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ *vicina* ad f nel senso che:

$$\text{per ogni } x \in [a, b] \text{ si ha:} \quad |f^*(x) - f(x)| \leqslant d_f + \delta$$

Dimostrazione. Nel primo caso, corrispondente alla procedura della Definizione 1.5.1, definito per ogni $x \in [a, b]$:

$$h^*(x) = h(x) - \big(h(\xi) - \xi\big)$$

si ha: $h^*(\xi) = h(\xi) - h(\xi) + \xi = \xi$, ovvero ξ è un punto unito di h^*, e per ogni $x \in [a, b]$:

$$|h^*(x) - h(x)| = |h(\xi) - \xi| = |h(\xi) - \phi(\xi) + \phi(\xi) - \xi| \leqslant |h(\xi) - \phi(\xi)| + |\phi(\xi) - \xi|$$

Il primo addendo, per l'uniforme accuratezza di ϕ, è minore di d_h. Il secondo addendo è minore di δ perché, per la monotonia della funzione rd (Osservazione 0.2.5), si ha:

$$|\, \phi(\xi) \ominus \xi \,| < \mathrm{rd}(\delta) \qquad \Rightarrow \qquad |\, \phi(\xi) - \xi \,| < \delta$$

Nel secondo caso, corrispondente alla procedura della Definizione 1.5.2, definito per ogni $x \in [a, b]$:

$$f^*(x) = f(x) - f(\xi)$$

si ha: $f^*(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0$, ovvero ξ è uno zero di f^*, e per ogni $x \in [a, b]$:

$$|f^*(x) - f(x)| = |f(\xi)| = |f(\xi) - \psi(\xi) + \psi(\xi)| \leqslant |f(\xi) - \psi(\xi)| + |\psi(\xi)|$$

Il primo addendo, per l'uniforme accuratezza di ψ, è minore di d_f. Il secondo addendo è minore di δ perché, per la monotonia della funzione rd, si ha:

$$|\psi(\xi)| < \mathrm{rd}(\delta) \qquad \Rightarrow \qquad |\psi(\xi)| < \delta$$

Il teorema è dimostrato.

1.7.2 Osservazione (efficacia del criterio d'arresto)

Le procedure introdotte nelle Definizioni 1.5.1 e 1.5.2 definiscono *in ogni caso* un numero reale perchè in entrambi i casi il criterio d'arresto utilizzato è *efficace*. Infatti, per la continuità di h ed f:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} |\, h(x_k) - x_k \,| = 0 \quad \text{e} \lim_{k\to\infty} |\, f(x_k) \,| = 0$$

L'esempio seguente mostra che utilizzando il tipo *numero in virgola mobile e precisione finita* entrambi i criteri d'arresto *possono risultare non efficaci.*

1.7.3 Esempio

Siano $[a, b]$ un intervallo *non contenente zero*, $\phi : [a, b] \to M$ l'algoritmo scelto per approssimare h, $\gamma \in [a, b] \cap M$ e ξ_k la successione di elementi di $[a, b] \cap M$ definita da:

$$\xi_0 = \gamma \qquad \text{e} \qquad \xi_{k+1} = \phi(\xi_k) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

– Se ϕ non ha punti uniti in $[a,b] \cap M$ allora, detta $\Delta > 0$ la minima distanza tra due elementi consecutivi di $[a,b] \cap M$, si ha:[28]

$$\text{per ogni } k\text{:} \quad |\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| = |\xi_{k+1} - \xi_k| \geqslant \Delta$$

e quindi:

$$\text{per ogni } k\text{:} \quad |\,\phi(\xi_k) \ominus \xi_k\,| \geqslant \mathrm{rd}(\Delta) > 0$$

– Se l'algoritmo $\psi : [a,b] \to M$ utilizzato per approssimare f non ha zeri in $[a,b] \cap M$ allora, detto $\Delta > 0$ il minimo valore di $|\psi(\xi)|$ per $\xi \in [a,b] \cap M$ si ha:[29]

$$\text{per ogni } k : \quad |\,\psi(\xi_k)\,| \geqslant \Delta$$

e quindi:

$$\text{per ogni } k : \quad |\,\psi(\xi_k)\,| \geqslant \mathrm{rd}(\Delta) > 0$$

In entrambi i casi, scelto $0 < \delta < \mathrm{rd}(\Delta)$ l'istruzione `MetodoUnPunto`(h, γ, δ) eseguita in *Scilab* *non* definisce un elemento $\xi \in M$ perchè il criterio d'arresto *non è efficace*.

I teoremi seguenti studiano la successione ξ_k e contengono informazioni riguardanti l'*efficacia* dei criteri d'arresto.

1.7.4 Teorema (uso del tipo *numero in virgola mobile e precisione finita* nei metodi ad un punto) Si ha:

(A) per ogni $\xi \in [a,b] \cap M$:

$$|\,\xi - \alpha\,| > \frac{d_h}{1-L} \qquad \Rightarrow \qquad |\,\phi(\xi) - \alpha\,| < |\,\xi - \alpha\,|$$

(B) per ogni k si ha:

$$|\,\xi_k - x_k\,| \leqslant \frac{1-L^k}{1-L}\, d_h$$

(C) per ogni k si ha:

$$|\,\xi_k - \alpha\,| \leqslant \frac{1-L^k}{1-L}\, d_h + L^k |\,\xi_0 - \alpha\,| = \frac{d_h}{1-L} + L^k \left(|\,\xi_0 - \alpha\,| - \frac{d_h}{1-L} \right)$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in [a,b] \cap M$ si ha, utilizzando l'uniforme accuratezza di ϕ:

$$|\,\phi(\xi) - \alpha\,| \leqslant |\,\phi(\xi) - h(\xi)\,| + |\,h(\xi) - h(\alpha)\,| \leqslant d_h + |\,h(\xi) - h(\alpha)\,|$$

Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ tra ξ ed α tale che:

$$|\,h(\xi) - h(\alpha)\,| = |\,h'(\theta)\,|\,|\,\xi - \alpha\,|$$

e quindi, essendo $\theta \in [a,b]$:

$$|\,h(\xi) - h(\alpha)\,| \leqslant L\,|\,\xi - \alpha\,|$$

Dunque:

$$|\,\phi(\xi) - \alpha\,| \leqslant d_h + L\,|\,\xi - \alpha\,|$$

Siccome:

$$|\,\xi - \alpha\,| > \frac{d_h}{1-L} \qquad \Rightarrow \qquad d_h < (1-L)|\,\xi - \alpha\,|$$

si ottiene l'asserto (A).

Si ha poi:

$$|\,\xi_k - x_k\,| = |\,\phi(\xi_{k-1}) - h(x_{k-1})\,| \leqslant |\,\phi(\xi_{k-1}) - h(\xi_{k-1})\,| + |\,h(\xi_{k-1}) - h(x_{k-1})\,|$$

[28]La minima distanza tra due elementi consecutivi di $[a,b] \cap M$ è ben definita perché l'insieme $[a,b] \cap M$ è *finito*. Inoltre $\phi(\xi_k) - \xi_k \neq 0$ perché ϕ non ha punti uniti in $[a.b] \cap M$.

[29]Il minimo valore di $|\psi(\xi)|$ per $\xi \in [a,b] \cap M$ è ben definito perché l'insieme $[a,b] \cap M$ è *finito*; tale minimo è positivo perché ψ non ha zeri in $[a,b] \cap M$.

da cui, utilizzando ancora l'uniforme accuratezza di ϕ ed il Teorema di Lagrange:

$$|\,\xi_k - x_k\,| \leqslant d_h + L|\,\xi_{k-1} - x_{k-1}\,|$$

Iterando, e ricordando che $x_0 = \xi_0$ si ottiene:

$$|\,\xi_k - x_k\,| \leqslant \left(1 + L + \cdots + L^{k-1}\right) d_h = \frac{1 - L^k}{1 - L}\, d_h$$

ovvero l'asserto (B).

L'asserto (C) si ottiene immediatamente dall'asserto (B):

$$|\,\xi_k - \alpha\,| \leqslant |\,\xi_k - x_k\,| + |\,x_k - \alpha\,| \leqslant \frac{1 - L^k}{1 - L}\, d_h + L^k|\,\xi_0 - \alpha\,|$$

Il teorema è dimostrato.

1.7.5 Osservazione
Si osservi che:

- L'asserto (A) garantisce che *la successione delle distanze* $|\,\xi_k - \alpha\,|$ *è decrescente finché* ξ_k *non entra nell'intorno chiuso di centro* α *e raggio* $d_h/(1 - L)$*, dopodiché nulla si può dire.* In particolare: *non è garantita la convergenza della successione* ξ_k*.*
- L'asserto (B) afferma che *le successioni* ξ_k *ed* x_k *non sono mai troppo lontane.*
- L'asserto (C) traduce in termini di distanza di ξ_k da α quanto mostrato dall'asserto (A).

1.7.6 Teorema (uso del tipo *numero in virgola mobile e precisione finita*, continuazione)
Sia δ un numero reale positivo. *Allora*:

(D) Se:

$$\textit{se}\ |\,\phi(\xi_k) \ominus \xi_k\,| < \mathrm{rd}(\delta)\ \textit{allora}\ \text{esci dal ciclo}$$

è la realizzazione del criterio d'arresto, si ha:

- Il criterio è *calcolabile.*
- Per decidere l'efficacia si studia la successione $|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,|$. Si ha:

$$|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| \leqslant |\,\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\,| + |\,h(\xi_k) - h(\xi_{k-1})\,| + |\,h(\xi_{k-1}) - \phi(\xi_{k-1})\,|$$

Utilizzando l'uniforme accuratezza dell'algoritmo ϕ ed il Teorema di Lagrange si ottiene:

$$|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| \leqslant d_h + L\,|\,\phi(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1}\,| + d_h = L\,|\,\phi(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1}\,| + 2\,d_h$$

Allora:

(a) iterando all'indietro:

$$|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| \leqslant L^k\,|\,\phi(\xi_0) - \xi_0\,| + 2\,\frac{1 - L^k}{1 - L}\, d_h = \frac{2\,d_h}{1 - L} + L^k\left(|\,\phi(\xi_0) - \xi_0\,| - \frac{2\,d_h}{1 - L}\right)$$

(b) se $|\,\phi(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1}\,| > \dfrac{2\,d_h}{1 - L}$ allora $|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| < |\,\phi(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1}\,|$.[30]

Se ne deduce che *la successione* $|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,|$ *è decrescente finché:*

$$|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| > \frac{2\,d_h}{1 - L}$$

dopodiché nulla si può dire. Dunque *il criterio può risultare non efficace.* In base ai risultati ottenuti, una *condizione sufficiente* per l'efficacia del criterio è:

$$\delta > \frac{2\,d_h}{1 - L}$$

[30] Infatti, posto $\Delta_k = |\phi(\xi_k) - \xi_k|$ si ha: $\Delta_{k-1} > 2\,d_h/(1 - L) \Rightarrow (1 - L)\,\Delta_{k-1} > 2\,d_h \Rightarrow \Delta_{k-1} > L\,\Delta_{k-1} + 2\,d_h$ e quindi: $\Delta_k \leqslant L\,\Delta_{k-1} + 2\,d_h < \Delta_{k-1}$.

- Sia k tale che:

$$|\,\phi(\xi_k)\ominus\xi_k\,| < \mathrm{rd}(\delta)$$

Allora, per il Teorema 1.7.1, ξ_k è punto unito di una funzione $h^*:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che:

$$\text{per ogni } x\in[a,b]: \quad |\,h^*(x)-h(x)\,| < \delta + d_h$$

Per quanto detto nella Sezione 1.6 sul condizionamento del calcolo di un punto unito si ottiene:

$$|\xi_k-\alpha| < \frac{\delta+d_h}{1-h'(\alpha)}$$

risultato simile a quello ottenuto utilizzando il tipo *numero reale*, e quindi soggetto alle stesse critiche.

(E) Se:

$$\textit{se } |\,\psi(\xi_k)\,| < \mathrm{rd}(\delta) \textit{ allora } \text{arresta la costruzione}$$

è la realizzazione del criterio d'arresto, si ha:

- Il criterio è *calcolabile*.
- Per decidere l'efficacia si studia la successione $|\,\psi(\xi_k)\,|$. Si riscrive:

$$\psi(\xi_k) = \big(\psi(\xi_k)-f(\xi_k)\big) + \big(f(\xi_k)-f(\alpha)\big)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra ξ_k e α tale che:

$$\psi(\xi_k) = \big(\psi(\xi_k)-f(\xi_k)\big) + f'(\theta_k)(\xi_k-\alpha)$$

Utilizzando l'uniforme accuratezza dell'algoritmo ψ e quanto osservato riguardo all'asserto (C), detto M_1 il massimo valore di $|\,f'(x)\,|$ nell'intorno chiuso di centro α e raggio $d_h/(1-L)$, per k sufficientemente grande si ottiene:

$$|\,\psi(\xi_k)\,| \leqslant d_f + M_1\,\frac{d_h}{1-L}$$

e *nulla si può dire sulla convergenza a zero della successione.* Dunque *il criterio può risultare non efficace.* In particolare, supponendo $M_1 \approx |\,f'(\alpha)\,|$, *non è ragionevole aspettarsi di ottenere:*

$$|\,\psi(\xi_k)\,| < d_f + |\,f'(\alpha)\,|\,\frac{d_h}{1-L}$$

È perciò opportuno che l'utilizzatore scelga:

$$\delta > d_f + |\,f'(\alpha)\,|\,\frac{d_h}{1-L}$$

- Sia k tale che:

$$|\,\psi(\xi_k)\,| < \mathrm{rd}(\delta)$$

Allora, per il Teorema 1.7.1, ξ_k è zero di una funzione $f^*:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che:

$$\text{per ogni } x\in[a,b]: \quad |\,f^*(x)-f(x)\,| < \delta + d_f$$

Per quanto detto nella Sezione 1.6 sul condizionamento del calcolo di uno zero si ottiene:

$$|\xi_k-\alpha| < \frac{\delta+d_f}{|\,f'(\alpha)\,|}$$

risultato simile a quello ottenuto utilizzando il tipo *numero reale*, e quindi soggetto alle stesse critiche.

Esercizi

E21 ♠ Sia f la funzione definita da $f(x) = x + x^3$.

(1) Dimostrare che il metodo di Newton *è utilizzabile* per approssimare lo zero di f.

(2) Dimostrare che *non è possibile* utilizzare il criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton.

(3) Calcolare la funzione h che definisce il metodo di Newton applicato ad f e la derivata prima $h'(x)$. Utilizzare poi *Scilab* per disegnare il grafico di $h'(x)$ sull'intervallo $[-2, 2]$.

(4) Con il grafico disegnato al punto precedente determinare un intervallo che, insieme ad h, verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza ed utilizzare poi il criterio di scelta del valore iniziale per metodi ad un punto.

E22 Sia $f(x) = e^x + x - 3$.

(1) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(2) Per ciascuno degli zeri di f decidere se il metodo ad un punto definito dalla funzione:

$$h(x) = 3 - e^x$$

sia utilizzabile per approssimare lo zero e, eventualmente, indicare un valore a partire dal quale la successione generata è convergente.

(3) Per ciascuno degli zeri di f decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per approssimare lo zero e, eventualmente, indicare un valore a partire dal quale la successione generata è convergente.

E23 Sia $f(x;t) = x^2 - (10 + \frac{1}{10} + t)x + 1$. Stimare lo scostamento dei rispettivi zeri di $f(x;0)$ e $f(x;0.1)$.

Appendice 1

Siano $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata seconda continua ed $\alpha \in (a, b)$ un punto unito di h. Se $h'(\alpha) = 0$ il metodo ad un punto definito da h è utilizzabile per approssimare α. Sia allora x_k una successione generata dal metodo e convergente ad α. In questa Appendice si dimostra che se $h''(\alpha) \neq 0$ allora per ogni $\theta \in (0, 1)$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\, x_k - \alpha \,|}{\theta^k} = 0$$

Poiché h ha derivata seconda continua, sussiste lo sviluppo di Taylor in α con resto in forma di Lagrange: per ogni $x \in (a, b)$ esiste τ tra x ed α tale che:

$$h(x) = h(\alpha) + h'(\alpha)\,(x - \alpha) + \tfrac{1}{2}\, h''(\tau)\,(x - \alpha)^2$$

ovvero, essendo $h'(\alpha) = 0$:

$$h(x) - h(\alpha) = \tfrac{1}{2}\, h''(\tau)\,(x - \alpha)^2$$

Poiché $h''(\alpha) \neq 0$, eventualmente restringendo $[a, b]$ si ha:

$$0 < \lambda_2 = \min_{[a,b]} |\, h''(x) \,| \leqslant |\, h''(x) \,| \leqslant \max_{[a,b]} |\, h''(x) \,| = L_2$$

Infine, poiché $|\, x_k - \alpha \,| \to 0$, esiste n sufficientemente grande tale che:

$$\frac{L_2}{2}\,|\, x_n - \alpha \,| < 1$$

Si consideri adesso la successione $y_k = x_{n+k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Posto $d_k = |\, y_k - \alpha\,|$, per ogni k numero intero positivo esiste τ_{k-1} tra y_{k-1} ed α tale che:

$$d_k = |\, h(y_{k-1} - h(\alpha)\,| = \tfrac{1}{2}\,|\, h''(\tau_{k-1})\,|\, d_{k-1}^2$$

e quindi tale che:

$$\frac{\lambda_2}{2}\, d_{k-1}^2 \leqslant d_k \leqslant \frac{L_2}{2}\, d_{k-1}^2 \qquad (*)$$

Ma:

$$d_{k-1} = |\, h(y_{k-2} - h(\alpha)\,| = \tfrac{1}{2}\,|\, h''(\tau_{k-2})\,|\, d_{k-2}^2$$

quindi:

$$\frac{\lambda_2}{2}\, d_{k-2}^2 \leqslant d_{k-1} \leqslant \frac{L_2}{2}\, d_{k-2}^2$$

Utilizzando la relazione $(*)$ si ottiene allora:

$$\frac{\lambda_2}{2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\, d_{k-2}^2\right)^2 \leqslant d_k \leqslant \frac{L_2}{2}\left(\frac{L_2}{2}\, d_{k-2}^2\right)^2$$

ovvero:

$$\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^{1+2} d_{k-2}^{2^2} \leqslant d_k \leqslant \left(\frac{L_2}{2}\right)^{1+2} d_{k-2}^{2^2}$$

Iterando il ragionamento all'indietro si ottiene:

$$\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^{1+2+\cdots+2^{k-1}} d_0^{2^k} \leqslant d_k \leqslant \left(\frac{L_2}{2}\right)^{1+2+\cdots+2^{k-1}} d_0^{2^k}$$

Poiché $1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ la relazione si riscrive:

$$\frac{2}{\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\, d_0\right)^{2^k} \leqslant d_k \leqslant \frac{2}{L_2}\left(\frac{L_2}{2}\, d_0\right)^{2^k}$$

Sia adesso $\theta \in (0, 1)$. Posto:

$$\frac{L_2}{2}\, d_0 = \gamma$$

e, per $k \geqslant n, j = k - n$, si ha:

$$0 \leqslant \frac{|\, x_k - \alpha\,|}{\theta^k} = \frac{|\, x_{j+n} - \alpha\,|}{\theta^{j+n}} = \frac{1}{\theta^n}\,\frac{|\, y_j - \alpha\,|}{\theta^j} = \frac{1}{\theta^n}\,\frac{d_j}{\theta^j} \leqslant \frac{1}{\theta^n}\,\frac{2}{L_2}\,\frac{\gamma^{2^j}}{\theta^j} \qquad (**)$$

Poiché:

$$\log \frac{\gamma^{2^j}}{\theta^j} = 2^j\,\log\gamma - j\,\log\theta \to -\infty$$

allora:

$$\frac{\gamma^{2^j}}{\theta^j} \to 0$$

L'asserto segue dalla $(**)$.

Appendice 2

Siano $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua, α l'unico punto unito di h e $|\, h'(\alpha)\,| = 1$. Sia infine x_k una successione generata dal metodo iterativo definito da h. In questa appendice si dimostra che se $\lim x_k = \alpha$ e per ogni k si ha $x_k \neq \alpha$ allora:

$$\textit{per ogni } \theta \in (0,1) \textit{ si ha:} \qquad \lim \frac{|\, x_k - \alpha\,|}{\theta^k} = +\infty$$

Sia $x_0 \neq \alpha$. Per ogni j numero intero non negativo, il Teorema di Lagrange assicura l'esistenza di un numero reale t_j tra x_{j+1} e α tale che:

$$|\, x_{j+1} - \alpha\,| = |\, h'(t_j)\,|\,|\, x_j - \alpha\,|$$

Poichè $\lim x_k = \alpha$ si ha anche $\lim t_k = \alpha$ e quindi $\lim |\, h'(t_k)\,| = 1$. Scelto $\theta \in (0,1)$, sia n un numero intero tale che:

$$\text{per ogni } k \geqslant n : \quad |\, h'(t_k)\,| \geqslant \frac{1+\theta}{2}$$

Sia adesso $k > n$. Si ha:

$$\frac{|\, x_k - \alpha\,|}{\theta^k} = \frac{|\, h'(t_{k-1})\,|}{\theta} \cdots \frac{|\, h'(t_n)\,|}{\theta} \frac{|\, h'(t_{n-1})\,|}{\theta} \cdots \frac{|\, h'(t_0)\,|}{\theta} |\, x_0 - \alpha\,|$$

Posto:

$$\Gamma = \frac{|\, h'(t_{n-1})\,|}{\theta} \cdots \frac{|\, h'(t_0)\,|}{\theta} |\, x_0 - \alpha\,|$$

e constatato che per $k \geqslant n$ si ha:

$$\frac{|\, h'(t_k)\,|}{\theta} \geqslant \frac{1+\theta}{2\theta}$$

si ottiene:

$$\frac{|\, x_k - \alpha\,|}{\theta^k} \geqslant \Big(\frac{1+\theta}{2\theta} \Big)^{k-n} \Gamma$$

Ma:

$$\theta < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\theta}{2\theta} > 1$$

dunque:

$$\lim \Big(\frac{1+\theta}{2\theta} \Big)^{k-n} \Gamma = +\infty$$

da cui segue l'asserto.